Elementi di Logica

prof. D Benetti

1. Introduzione

Quando parliamo, facciamo un discorso, questo, per quanto semplice o complesso possa essere, si compone di un insieme di parti dette **proposizioni**.
Così come una molecola si compone di atomi, un discorso è formato da proposizioni.

Una **proposizione matematica** è una sequenza di simboli il cui significato può assumere due valori: uno di *verità* (*V*) e l'altro di *falsità* (*F*).

Esempio:

i. "Il 25 dicembre è Natale". È una proposizione matematica con valore *V*.
ii. "Il numero 7 è divisibile per 2". È una proposizione matematica con valore *F*.
iii. "Domenica vincerò al Totocalcio". Non è una proposizione matematica.
iv. "Oggi piove". È una proposizione matematica ma qual è il suo valore?

L'ultima proposizione, "Oggi piove", è sicuramente una proposizione matematica, perché può assumere solo due valori: Se piove allora sarà *vera*, altrimenti risulterà *falsa*. Proposizioni di questo tipo dipendono quindi dal contesto, ovvero dobbiamo immaginare una situazione, un momento, un **modello** che per esse abbia senso. Per la proposizione "Oggi piove" abbiamo bisogno di un modello temporale, perché in una giornata possono esserci momenti di pioggia (e quindi la proposizione risulterebbe *vera*) e momenti non di pioggia (per i quali la proposizione è *falsa*).
Un altro esempio di questo tipo di proposizione è il seguente: "*T* è un triangolo rettangolo". Se *T* è come in Figura 1a. allora la proposizione risulta *vera*, se invece considero come modello quello rappresentato in Figura 1b. allora la proposizione sarà *falsa*.

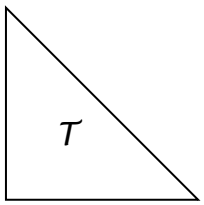


Figura 1a.

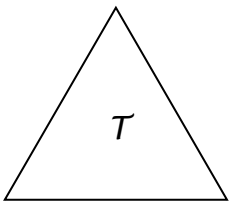


Figura 1b.

La **Logica** si pone come obiettivo verificare l'esattezza dei ragionamenti, cioè stabilire in che modo da una o più proposizioni è possibile **dedurre logicamente** altre proposizioni.

La logica sulla quale si basa la Matematica è la **logica a due valori**, ovvero costruita con delle proposizioni (matematiche) che ammettono un valore di verità (la proposizione è vera) e un valore di falsità (la proposizione è falsa). In generale, si dice che le proposizioni matematiche sono delle proposizioni che ammettono **valore di verità**.

2. I connettivi logici

Il problema del calcolo delle proposizioni è determinare il valore di verità di composizioni di più proposizioni.
Prima di affrontare il problema dobbiamo capire come si combinano le proposizioni, ovvero quali sono le operazioni che si possono fare tra le proposizioni.
Esse si compongono grazie ai così detti **connettivi logici**. I connettivi logici fondamentali sono cinque:

denominazione (LT)	denominazione (IT)	denominazione (EN)	SIMBOLO
non	non	not	¬
et	e	and	∧
vel	o	or	∨

abbreviazione	denominazione (IT)	denominazione (EN)	SIMBOLO
-	se… allora…	if… then…	→
sse o iff	… se e solo se…	… if and only if…	↔

Vediamo i connettivi in dettaglio.

1) Il connettivo ¬ . La **negazione**.
   Tale connettivo inverte il valore di verità di una proposizione.

   Esempio: Consideriamo la proposizione *p* così definita

   p: Sara mangia una mela.

   Allora ¬*p* sarà

   ¬*p :* Sara *non* mangia una mela.

   Il valore di verità che assume una proposizione si può valutare anche con la **tavola di verità**. In una tavola di verità è possibile distinguere tutti i casi possibili dei valori di verità assunti dalle proposizioni.
   Vediamo la tavola di verità del connettivo negazione:

p	¬*p*
V	*F*
F	*V*

   Osservazione: Se applichiamo ad una stessa proposizione *p* due volte il connettivo negazione otteniamo nuovamente *p*, infatti avremo la seguente tavola di verità:

p	¬*p*	¬ ¬*p*
V	*F*	*V*
F	*V*	*F*

Confrontando la prima colonna con l'ultima si vede che $p = \neg\neg p$, perché assumono sempre lo stesso valore di verità. In altre parole, *due proposizione sono uguali quando, in ogni caso, hanno la medesima tavola di verità*.

Il connettivo $\neg$ opera su una proposizione p, producendo una proposizione $\neg p$ avente valori di verità opposti a quelli di p.

2) Il connettivo $\wedge$. La **congiunzione**.
Spieghiamo la funzionalità di tale connettivo con il seguente

Esempio: Consideriamo le proposizioni

p: Sara mangia una mela.

q: Sara studia.

La proposizione composta da *p* e *q* tramite la congiunzione è

$p \wedge q$ *:* Sara mangia una mela **e** (Sara) studia.

Le coppie di valori che *p* e *q* possono assumere sono quattro:

		p	*q*
i.	*p* e *q* entrambe vere;	*V*	*V*
ii.	*p* vera e *q* falsa;	*V*	*F*
iii.	*p* falsa e *q* vera;	*F*	*V*
iv.	*p* e *q* entrambe false.	*F*	*F*

Riprendendo l'esempio, se in un dato momento (che chiamiamo **modello**) Sara mangia una mela ma **non** studia, abbiamo che *p* ha valore di verità *V* invece *q* vale *F*. Allora il valore di verità di $p \wedge q$ sarà *F*, visto che la risposta alla domanda "È vero che Sara mangia una mela **e** studia?" è negativa.
Analizzando gli altri casi si costruisce la seguente tavola di verità:

p	*q*	$p \wedge q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Il connettivo $\wedge$ opera su due proposizioni p e q, producendo una proposizione $p \wedge q$ che è vera solo quando p e q sono entrambe vere e falsa in tutti gli altri casi.

3) Il connettivo $\vee$. La **disgiunzione**.

Esempio: Consideriamo le proposizioni

p: Oggi piove.

q: Gino dorme.

La proposizione composta da *p* e *q* tramite la disgiunzione è

$p \vee q$ *:* Oggi piove **o** Gino dorme.

È chiaro che basta sia vera una sola delle due proposizioni per far sì che la proposizione composta $p \vee q$ risulti vera.
Vediamo la tavola di verità per la disgiunzione:

p	q	$p \vee q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Il connettivo **o** *opera su due proposizioni p e q, producendo una proposizione* $p \vee q$ *che è vera se è vera almeno una delle proposizioni p e q ed è falsa solo se p e q sono entrambe false.*

4) Il connettivo $\rightarrow$. L'**implicazione logica**[1].

Ad esempio, la proposizione "**Se** il tempo è bello **allora** faccio una passeggiata", composta dalle due proposizioni elementari

p: Il tempo è bello.

q: Faccio una passeggiata.

può essere scritta come

se *p* allora *q*. (in simboli, $p \rightarrow q$)

In questo caso la proposizione *p* prende il nome di **antecedente** e *q* è chiamata **conseguente**.
Come succede anche per i connettivi logici precedenti, *quello che ci interessa è il valore di verità della proposizione di arrivo, in relazione (mediante la corrispondente tavola di verità) ai valori di verità delle proposizioni di partenza.*

[1] Per una esposizione esauriente si faccia riferimento anche al paragrafo 5.1.

Tra *p* e *q* non è detto che ci sia sempre un nesso logico, posso scegliere, così come per gli altri connettivi, due proposizioni qualsiasi; ad esempio

p: 2 è un numero pari.

q: Roma è la capitale d'Italia.

Dunque l'implicazione logica $p \rightarrow q$ *non significa necessariamente che p è la causa di q o che q è la conseguenza logica di p*, come a prima vista potrebbe sembrare se ci affidassimo al significato che nel linguaggio comune diamo alla frase "se *p* allora *q*".
Allora, perché risulti chiaro il significato del connettivo $\rightarrow$, *conviene affidarci esclusivamente alla tavola di verità che lo definisce*:

p	q	$p \rightarrow q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Esaminiamo la tavola rigo per rigo.

1° rigo: Se *p* e *q* sono entrambe vere, allora $p \rightarrow q$ è certamente vera. Posto, ad esempio:

p: 2 è un numero pari.

q: Vicenza è una città del Veneto.

la proposizione

$p \rightarrow q$ *:* **Se** 2 è un numero pari **allora** Vicenza è una città del Veneto

è vera, anche se è ben evidente che *p* non è la causa di *q*.

2° rigo: Se *p* è vera e *q* è falsa, allora $p \rightarrow q$ è falsa. Posto:

p: 2 è un numero pari.

q: Vicenza è una città dell'Emilia Romagna.

la proposizione

$p \rightarrow q$ *:* **Se** 2 è un numero pari **allora** Vicenza è una città dell'Emilia Romagna

è falsa.

3° rigo: Se *p* è falsa e *q* è vera, allora $p \to q$ è vera. Posto:

p: 2 è un numero dispari.

q: Vicenza è una città del Veneto.

la proposizione

$p \to q$ *:* **Se** 2 è un numero dispari **allora** Vicenza è una città del Veneto

è vera. In altri termini, poiché Vicenza si trova effettivamente nel Veneto, noi riteniamo vera l'implicazione $p \to q$, indipendentemente dal valore di verità di *p*.

4° rigo: Se p e q sono entrambe false, allora $p \to q$ è vera. Posto:

p: 2 è un numero dispari.

q: Vicenza è una città dell'Emilia Romagna.

la proposizione

$p \to q$ *:* **Se** 2 è un numero dispari **allora** Vicenza è una città dell'Emilia Romagna

è vera.

L'esame della tavola di verità porta perciò alla seguente conclusione:

In connettivo $\to$ *opera su due proposizioni p e q, producendo una proposizione* $p \to q$ *che è falsa solo quando p è vera e q è falsa; in tutti gli altri casi è vera.*

Osservazione: Per i connettivi $\wedge$ e $\vee$ vale la proprietà commutativa, cioè

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad \text{e} \qquad p \vee q = q \vee p .$$

Per il connettivo $\to$ invece tale proprietà non sussiste, come si può osservare in base al ragionamento che segue. Per verificare se due proposizioni sono fra loro uguali, come nel caso $p = \neg\neg p$, basta vedere che *in ogni caso* le tavole di verità delle proposizioni in questione sono uguali. Viceversa, se due proposizioni hanno tavole di verità distinte almeno per un caso, esse non saranno uguali. Poiché considerando la proposizione $q \to p$ *si ottiene una tavola di verità diversa* rispetto a quella relativa alla proposizione $p \to q$

q	p	$q \to p$
V	*V*	*V*
F	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*F*	*V*

$p \to q$
V
F
V
V

possiamo dire che $p \to q \neq q \to p$.

5) Il connettivo $\leftrightarrow$. La **doppia implicazione logica**.
La proposizione $p \leftrightarrow q$ si legge

p **se e solo se** q

Facendo un'analisi come quella per il connettivo precedente, si ottiene la tavola di verità per la proposizione $p \leftrightarrow q$:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Come esempio per un'eventuale analisi si può usare l'esempio precedente o porre

p: Per T vale il Teorema di Pitagora.

q: T è un triangolo rettangolo.

Il connettivo $p \leftrightarrow q$ è chiamato doppia implicazione logica perché sussiste la seguente relazione:

$$p \leftrightarrow q = \left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(q \rightarrow p\right).$$

Verifichiamo l'uguaglianza confrontando le due tavole di verità:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(q \rightarrow p\right)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

3. Le Tautologie (princìpi della Logica)

Le **tautologie** *sono proposizioni composte che, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni componenti, risultano essere sempre vere*.

1) ***Il Principio del terzo escluso*** *(tertium non datur)*

Data una proposizione *p* qualsiasi, consideriamo la proposizione composta

$$p \vee \neg p \,.$$

La sua tavola di verità risulta essere

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*

Si nota che nell'ultima colonna della tavola compare sempre la lettera *V*: la proposizione $p \vee \neg p$ è sempre vera. Essa esprime il **Principio del terzo escluso**: *per ogni proposizione p, o p è vera o p è falsa*.

2) ***Il Principio di non contraddizione***

Tale principio afferma che *una qualsiasi proposizione p non può essere contemporaneamente vera e falsa. È falso, cioè, che siano simultaneamente vere una proposizione p* ***e*** *la sua negazione* $\neg p$.

In simboli $p \wedge \neg p$ risulterà sempre falsa, $\neg\left(p \vee \neg p\right)$ sarà sempre vera. Verifichiamo:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg\left(p \vee \neg p\right)$
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*V*

4. Le leggi di De Morgan

Alcune particolari equivalenze di proposizioni, vista la loro importanza a livello applicativo, prendono nome di **leggi**. Vediamo ora due leggi, vedendo le loro applicazioni più avanti. Tali leggi sono conosciute come **leggi di De Morgan**:

1) I Legge di De Morgan: $\neg\left(p \wedge q\right) = \neg p \vee \neg q$.

   Per verificare l'equivalenza, basta determinare la tavola di verità del primo membro, del secondo e metterle a confronto:

p	q	$p \wedge q$	$\neg\left(p \wedge q\right)$
V	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*V*

$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
F	*F*	*F*
F	*V*	*V*
V	*F*	*V*
V	*V*	*V*

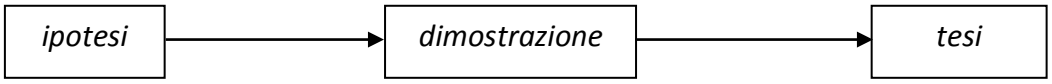
2) II Legge di De Morgan: $\neg\left(p \vee q\right) = \neg p \wedge \neg q$.

   Per verificare la seconda legge il ragionamento è analogo.

5. L'arte della deduzione

Dire che cos'è la **deduzione** esula dal nostro studio. Una sua definizione rigorosa verrà data in altri campi (Filosofia in testa). Ci limiteremo qui a darne un'idea di massima.

I teoremi costituiscono un classico esempio di deduzione: si parla di alcune premesse che costituiscono l'**ipotesi** (dal greco ὑπόθεσις, *hypothesis*, ovvero *supposizione*, che abbrevieremo con *hp*) e, attraverso l'applicazione di determinate regole di deduzione (che vedremo a breve), che costituiscono la **dimostrazione**, si perviene ad una conclusione o **tesi** (*θεσις*, *thesis*, ovvero *posizione*, che abbrevieremo con *th*).

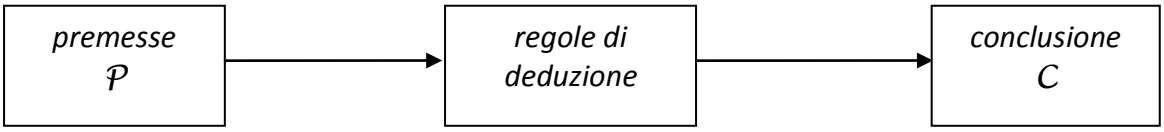


Esempio: "In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti". Quanto scritto rappresenta l'**enunciato** del teorema. Cerchiamo di individuare le ipotesi e la tesi:

hp: Un triangolo è isoscele.

th: Gli angoli alla base sono congruenti.

In generale una **deduzione** è un processo che da alcune **premesse** $\mathcal{P}$ permette, mediante **regole di deduzione**, una **conclusione** C.



5.1 Regola di inferenza deduttiva (l'implicazione)

La **regola di inferenza deduttiva** (*modus ponens* – legge di assegnazione) afferma che date due proposizioni *p* e *q*, se è vera l'implicazione $p \to q$ ed è vera *p* (antecedente), allora è vera anche *q* (conseguente).

Esempio: Consideriamo le seguenti proposizioni:

p: Matteo studia.

q: Matteo sarà promosso.

In simboli la regola di inferenza è

$p \to q$: Se Matteo studia allora sarà promosso.

p: Matteo studia.

---

q: Matteo sarà promosso.

La linea orizzontale viene usata come simbolo della parola “quindi”, “da cui”, … . Per comodità di scrittura sostituiremo la linea con il simbolo $\Rightarrow$. Con questa nuova simbologia la regola di inferenza si può scrivere

$$\left[\left(p \to q\right) \wedge p\right] \Rightarrow q\,,$$

che leggeremo:

$p \to q$ è vera ed è vera p, **quindi** q è vera

Facendo attenzione a non confondersi, la regola di inferenza può anche essere letta

Se $p \to q$ e p sono vere, **allora** q è vera

dove i termini “se” ed “allora” *non* rappresentano il connettivo implicazione logica ma fanno parte del linguaggio naturale, come le parole “quindi”, “da cui”, etc.

Il simbolo $\Rightarrow$ lo chiameremo **implicazione**.

Osservazione: C’è una sostanziale differenza tra l’implicazione logica e l’inferenza (o implicazione): nella prima la verità di p non comporta la verità di q, tant’è che le due proposizioni possono anche non avere un nesso logico fra loro. Nell’implicazione invece La verità di quello che sta a sinistra del simbolo $\Rightarrow$ porta alla verità di quello che sta alla destra, cioè di q.

Esempio: Consideriamo le seguenti proposizioni:

p: Alessandra è maggiorenne.

q: Alessandra ha diritto al voto.

In simboli la regola di inferenza è

$p \to q$ *:* Se Alessandra è maggiorenne allora ha diritto al voto.

p: Alessandra è maggiorenne.

---

q: Alessandra ha diritto al voto.

Ovvero $\left[\left(p \to q\right) \wedge p\right] \Rightarrow q$.

(non)Esempio: Consideriamo le seguenti proposizioni:

p: Piove.

q: Le strade sono bagnate.

Il ragionamento

$p \to q$: Se piove allora le strade sono bagnate.

q: Le strade sono bagnate.

---

p: Piove.

Vi sembra un ragionamento corretto? Esso porta allo schema $\left[\left(p \to q\right) \wedge q\right] \Rightarrow p$.

Esso non coincide con la regola d'inferenza. Infatti il ragionamento non è valido, perché la conclusione *p* non è conseguenza delle due premesse $p \to q$ e *q*. Vi rendete conto, del resto, che la caduta della pioggia *non* è una conseguenza del fatto che le strade sono bagnate!

(non)Esempio: Se un numero è primo, allora esso è dispari.

2 è un numero primo.

---

2 è un numero dispari.

In questo caso il ragionamento è valido, infatti, come si può verificare facilmente, la regola di inferenza è stata usata correttamente. Cosa c'è allora che non va? Si osserva che una proposizione della premessa è falsa, infatti "Se un numero è primo, allora esso è dispari" non è vera se prendiamo come modello il numero 2.
Possiamo trarre una conclusione molto significativa:

Anche se il processo di deduzione logica è corretto,
da premesse non vere discendono conclusioni false.

Esempio: Se $\mathcal{T}$ è un triangolo equilatero, allora $\mathcal{T}$ non è un triangolo rettangolo.

Il triangolo $\mathcal{T}$ non è equilatero.

Il triangolo $\mathcal{T}$ è rettangolo.

Poiché la conclusione è manifestamente falsa (un triangolo non equilatero può essere non rettangolo, infatti può ad esempio essere isoscele), cerchiamo di ricostruire lo schema seguito. Poniamo

p: $\mathcal{T}$ è un triangolo equilatero.

q: $\mathcal{T}$ non è un triangolo rettangolo.

Lo schema seguito diventa $\left[\left(p \to q\right) \wedge \neg p\right] \Rightarrow \neg q$.

Esso, come già detto, rispecchia un ragionamento non valido.

Riassumendo:

- La regola di inferenza, pur applicata correttamente, può portare a conclusioni false se una delle premesse è falsa (si veda l'esempio dei numeri primi).
- Sono da ritenere schemi non validi di ragionamento le forme $\left[\left(p \to q\right) \wedge q\right] \Rightarrow p$ e $\left[\left(p \to q\right) \wedge \neg p\right] \Rightarrow \neg q$.

5.2 Relazioni logicamente equivalenti

Consideriamo una proposizione in cui figurano un'ipotesi *p* ed una tesi *q* del tipo $p \Rightarrow q$.

La proposizione, che chiameremo **diretta**, può esprimere un teorema in Matematica, un'affermazione di carattere fisico, economico, … .

Scambiando la *p* con la *q*, otteniamo una nuova affermazione, $q \Rightarrow p$, che chiameremo proposizione **inversa** di quella di partenza.

Negando questa nuova proposizione, ovvero negando *q* e *p*, ne ottengo un'altra chiamata **controinversa**: $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Se nego la proposizione di partenza (od inverto la controinversa) ottengo una nuova proposizione detta **contraria**: $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Riassumendo:

$p \Rightarrow q$	diretta	$\neg q \Rightarrow \neg p$	controinversa
$q \Rightarrow p$	inversa	$\neg p \Rightarrow \neg q$	contraria

Se l'implicazione diretta è vera, cosa si può dire delle proposizioni derivate? Vediamo con un esempio:

Esempio: Consideriamo le seguenti proposizioni

p: Giovanna è italiana.

q: Giovanna è europea.

Possiamo osservare che, essendo vera $p \Rightarrow q$ (Se Giovanna è un'italiana allora è anche un'europea):

- *Non è sempre vera l'inversa* $q \Rightarrow p$. Infatti la proposizione inversa "Se Giovanna è europea allora è italiana" non è necessariamente vera, perché non tutti gli europei sono italiani.
- *È vera la controinversa* $\neg q \Rightarrow \neg p$. Infatti, la proposizione "Se Giovanna non è europea allora non è italiana" è certamente vera.

- *Non è sempre vera la contraria* $\neg p \Rightarrow \neg q$*.* Infatti la proposizione "Se Giovanna non è italiana allora non è europea" non è sempre vera: Giovanna, ad esempio, può essere spagnola, quindi non italiana, ma europea.

Da quanto abbiamo appena detto appare che se la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera allora è vera anche la controinversa $\neg q \Rightarrow \neg p$*.* Viceversa, se è vera la proposizione $\neg q \Rightarrow \neg p$, dovendo essere vera anche la sua controinversa, dovrà risultare vera $\neg \neg p \Rightarrow \neg \neg q$, cioè $p \Rightarrow q$.

Le proposizioni diretta e controinversa di dicono allora **logicamente equivalenti**. Ragionamenti analoghi fatti per l'inversa e la contraria porta a dire che anche queste proposizioni sono tra loro logicamente equivalenti.

$p \Rightarrow q$	diretta	e	$\neg q \Rightarrow \neg p$	controinversa	sono logicamente equivalenti
$q \Rightarrow p$	inversa	e	$\neg p \Rightarrow \neg q$	contraria	sono logicamente equivalenti

Nei casi in cui vale sia la proposizione diretta $p \Rightarrow q$ che quella inversa $q \Rightarrow p$ allora si scrive

$$p \Leftrightarrow q$$

Che si legge "*p* è vera se e solo se lo è *q*" oppure "*p* è vera se e soltanto se lo è *q*". Anche in questo caso "se e solo se" *non* rappresenta il connettivo logico ma fa parte del linguaggio comune.
Il simbolo $\Leftrightarrow$ è chiamato **doppia implicazione**, infatti vale la seguente relazione:

$$p \Leftrightarrow q = \left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow p\right).$$

5.3 La regola di inferenza della controinversa

Abbiamo appena visto che se $p \Rightarrow q$ è vera, allora anche la controinversa $\neg q \Rightarrow \neg p$ è vera. Da questo, facendo le stesse deduzioni per il *modus ponens*, possiamo enunciare la **regola di inferenza della controinversa** (*modus tollens* – legge di annullamento): Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ ed è vera $\neg q$ (i.e. è falsa *q*), allora è vera anche $\neg p$ (i.e. è falsa *p*). In formule, riproponendo l'esempio per il *modus ponens*:

$p \rightarrow q$ *:* Se Matteo studia allora sarà promosso.

$\neg q$ *:* Matteo non studia.

$\neg p$ *:* Matteo non sarà promosso.

In sintesi: $\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \neg q\right] \Rightarrow \neg p$.

5.4 Condizione sufficiente, necessaria, necessaria e sufficiente

Consideriamo le seguenti proposizioni:

p: Simone è italiano

q: Simone è europeo

e la proposizione $p \Rightarrow q$. **Condizione sufficiente** affinché Simone sia europeo è che sia italiano. In altre parole, è *sufficiente* essere italiani per essere europei. *p* rappresenta la condizione sufficiente affinché si verifichi *q*.

Affinché Simone sia italiano invece, è *necessario* che sia europeo. **Condizione necessaria** affinché Simone sia italiano è che sia europeo. *q* rappresenta la condizione necessaria affinché si verifichi *p*.

In definitiva, $p \Rightarrow q$ si può leggere come "*p* è condizione sufficiente per *q*", oppure "*q* è condizione necessaria per *p*".

Solo quando siamo di fronte a una doppia implicazione, del tipo $p \Leftrightarrow q$, si può dire che ciascuna di esse è **condizione necessaria e sufficiente** per l'altra.

Esempio: *p:* Per T vale il Teorema di Pitagora

q: T è un triangolo rettangolo

In definitiva, $p \Leftrightarrow q$ si può leggere come "*p* è condizione necessaria e sufficiente per *q*", oppure "*q* è condizione necessaria e sufficiente per *p*".

5.5 I quantificatori

I quantificatori sono dei simboli del linguaggio matematico che indicano quanti elementi di un insieme soddisfano certe condizioni. Sono fondamentalmente due:

1) **quantificatore universale** $\forall$ "per ogni", "qualunque sia"

   Esempio: Sia $U = \{ x \mid x \text{ è un uomo} \}$ e consideriamo la proposizione seguente:

   p: tutti gli uomini sono mortali

   Allora si scrive

   $$\forall x \in U \mid x \text{ "è mortale"}$$

   e si legge "per ogni *x* in *U*, *x* è mortale", ovvero qualunque uomo è mortale.

2) **quantificatore esistenziale** $\exists$ "esiste un", "per almeno un"

   Esempio: Sia $S = \{ x \mid 2 < x < 4,\ x \in \mathbf{N} \}$. Possiamo dire che esiste un *x* in S che soddisfa la proprietà richiesta, in simboli $\exists\, x \in S \mid 2 < x < 4$. Tale *x* è 3.

(non)Esempio: Possiamo anche affermare che non esiste un certo elemento, per esempio $\nexists x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x+5=3$. Il simbolo $\nexists$ si legge "non esiste un".

La negazione del quantificatore $\forall$ non ha un nuovo simbolo che lo rappresenta. Meglio, dire "non per ogni" significa che "esiste (almeno) un", quindi la negazione di $\forall$ è $\exists$.

Esempio: consideriamo la proposizione "tutti i cavalli sono bianchi". La sua negazione è "non tutti i cavalli sono bianchi", ovvero "esiste (almeno) un cavallo non bianco".

5.6 La dimostrazione

L'insieme dei passaggi logici deduttivi che portano dalle ipotesi alla tesi formano quello che è chiamata **dimostrazione** (che abbrevieremo con *dim*).

Le dimostrazioni che avete visto finora sono di tipo *diretto*, cioè date delle ipotesi, partivate da quelle per giungere alla vostra conclusione o tesi. Ne vediamo una:

Enunciato: Siano a e b due numeri naturali. Allora $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Dall'enunciato possiamo estrarre le ipotesi

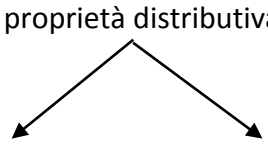
hp: a e b sono due numeri naturali.

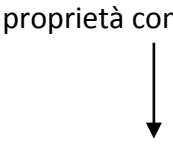
e la tesi

th: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Vediamo come possiamo svolgere la dimostrazione.

dim: Per la proprietà delle potenze, per ogni $x \in \mathbf{N}$ si ha $x^2 = x \cdot x$, quindi $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$. Sfruttando le proprietà delle operazioni ottengo





$$(a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b = aa + 2ab + bb$$

e, riapplicando le proprietà delle potenze, ottengo

$aa + 2ab + bb = a^2 + 2ab + b^2$.

Unendo il tutto e tralasciando i passaggi intermedi si ottiene $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, cioè la tesi.

Le dimostrazioni si concludono solitamente con un quadrato bianco □ o nero ■ oppure con la scritta QED (*Quod Erat Demonstrandum*) o la sua traduzione in italiano CVD (Come Volevasi Dimostrare).

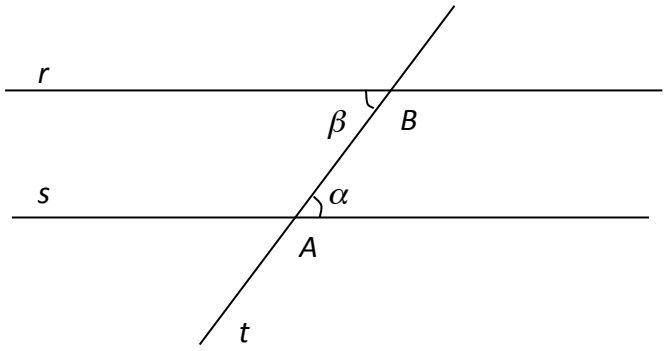
Non sempre le dimostrazioni di tipo diretto risultano efficaci; spesso conviene ricorrere ad un metodo dimostrativo *indiretto*, che consiste nel dimostrare una proposizione logicamente equivalente a quella data.

Esempio: "Se due rette tagliate da una trasversale formano due angoli alterni interni uguali, allora le due rette sono uguali".
Riconosciamo innanzitutto l'ipotesi e la tesi:

hp: due rette tagliate da una trasversale formano due angoli alterni interni uguali.
th: le rette sono parallele.

Cerchiamo ora di dimostrare l'affermazione:

dim: dobbiamo verificare che $hp \Rightarrow th$. Cerchiamo di disegnare la situazione, con lo scopo di renderci conto di come stanno le cose:



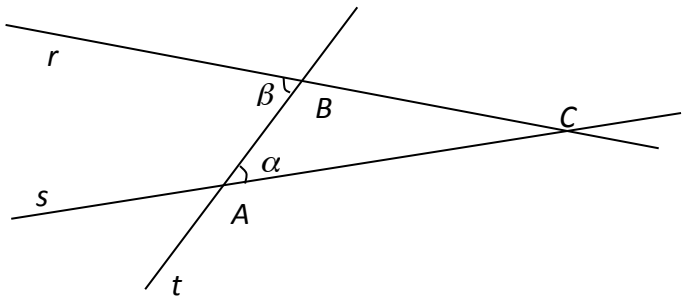
r ed *s* sono le due rette parallele e *t* la trasversale. Chiamiamo α e β gli angoli alterni interni. Dobbiamo dimostrare che

$$(\alpha = \beta) \Rightarrow (r // s)$$

Dove con *r//s* intendiamo la proposizione "la retta *r* è parallela alla retta *s*".
Consideriamo l'implicazione equivalente (la controinversa):

$$\neg(r // s) \Rightarrow \neg(\alpha = \beta)$$

Dobbiamo quindi assumere che le rette non siano parallele e dedurre che i due angoli non sono congruenti.
Se *r* ed *s* non sono parallele allora si incontrano in un punto che chiamiamo *C*:



Quindi la figura *ABC* risulta essere un triangolo. Sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°, cioè $180° = B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A = \alpha + A\hat{C}B + C\hat{B}A$; ma $C\hat{B}A + \beta = 180°$, cioè $C\hat{B}A = 180° - \beta$ e sostituendo nella precedente relazione: $\alpha + A\hat{C}B + C\hat{B}A = \alpha + A\hat{C}B + (180° - \beta)$.

Confrontiamo ora le due relazioni, in particolare il primo membro della prima relazione con l'ultimo membro della seconda relazione. Otteniamo 180° = $\alpha + A\hat{C}B + (180° - \beta)$, cioè $\beta = \alpha + A\hat{C}B$, quindi $\alpha \neq \beta$.

□

Un altro metodo di dimostrazione indiretta è la **dimostrazione per assurdo** (*reductio ad absurdum*). Dovendo dimostrare che $hp \Rightarrow th$, neghiamo la tesi *th*, prendiamo cioè per vera $\neg th$ e da $\neg th$ deduciamo un certo numero di proposizioni, fino a trovare una proposizione che sia in contraddizione con una proposizione accettata per vera. Ora, poiché $\neg th$ conduce a un assurdo, dobbiamo concludere che la stessa $\neg th$ è falsa, ovvero che *th* è vera.

Esempio: "$\sqrt{2}$ non è un numero razionale ($\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$)"

Dimostrazione: Per assurdo supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Allora esistono due numeri interi *a* e *b* tali che $\sqrt{2} = a/b$. Se i numeri *a* e *b* hanno fattori comuni allora questi li posso semplificare. Per esempio se $a = 24$ e $b = 16$ posso scrivere $a/b = 24/16 = 3 \cdot 8/2 \cdot 8 = 3/2$. Generalizzando posso dire che dati due interi, a meno di fattori comuni, il loro rapporto rimane sempre lo stesso. Per tali motivi possiamo considerare gli interi *a* e *b* privi di fattori comuni.
Poiché *a* e *b* non hanno fattori comuni, ci sono le seguenti possibilità:

a pari	*b* dispari
a dispari	*b* pari
a dispari	*b* dispari

Abbiamo che $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$.

Poiché $a^2 = 2b^2$, a^2 risulta essere pari e di conseguenza anche a è pari. Con questa osservazione si scartano immediatamente la seconda e la terza possibilità. Giocoforza l'unica possibilità che rimane è

a pari	*b* dispari

Ma se a è pari, a^2 risulta essere divisibile per 4, infatti: *a* pari $\Rightarrow a = 2c$ per un opportuno $c \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 4c^2$.
Quindi abbiamo trovato le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2 = 4c^2 \end{cases},$$

dalle quali ricaviamo (per confronto) che $4c^2 = 2b^2$, cioè che $b^2 = 2c^2$.
Ma allora b^2 è pari e questo comporta che anche b è pari, contraddicendo l'assunzione *b* dispari.
Allora la proposizione $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ risulta falsa, cioè $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ è vera.

□

6. Riferimenti bibliografici

Libri di testo consultati:

[1] P. Oriolo e A. Coda, *Algebra e informatica 1*, Bruno Mondadori, Milano, 1988.

[2] N. Dodero e J. Toscani, *Corso di algebra 1*, Ghisetti e Corvi, Milano, 1989.

Siti web visitati:

[3] http://it.wikipedia.org/wiki/Implicazione_logica

[4] http://it.wikipedia.org/wiki/Ipotesi