Il periodo di una funzione

prof. D. Benetti

Definizione 1: Sia $f:D\to R$ una funzione, $D\subseteq R$ e sia T un numero reale positivo. Si dice che f ***è periodica di periodo*** T se, per ogni $x\in D$ e per ogni $k\in Z$, si ha

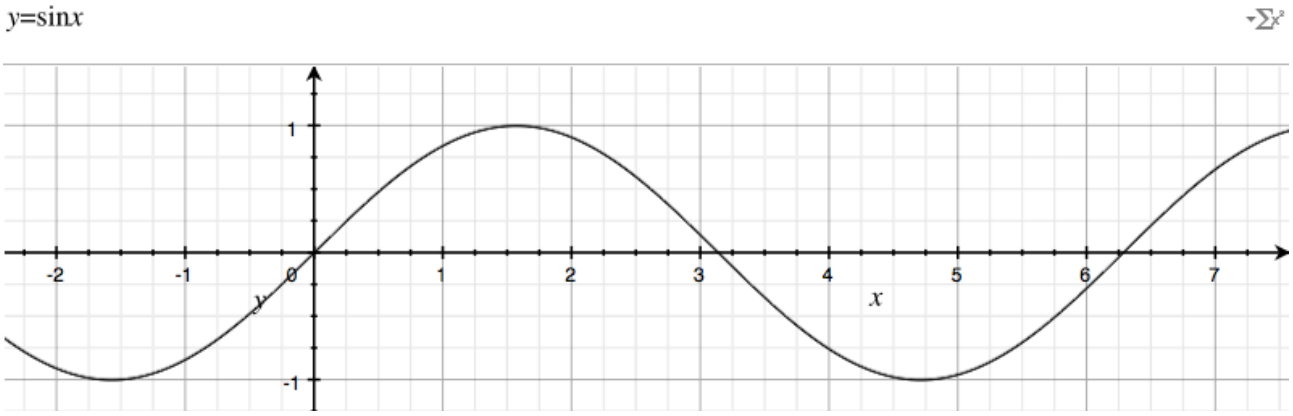
$$f\left(x+kT\right)=f\left(x\right).$$

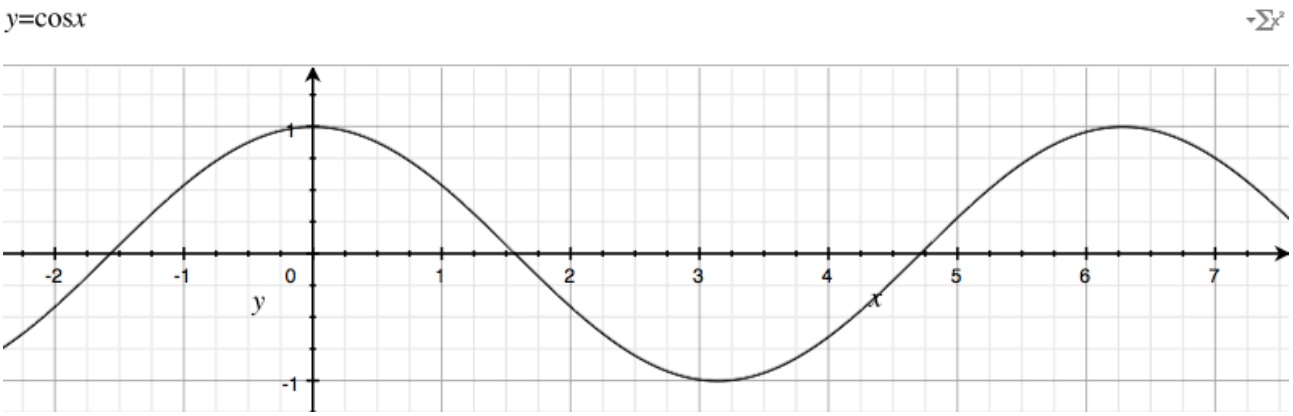
Osservazione 2: 1. Visto che $k\in Z$ è arbitrario, è indifferente scrivere $f\left(x+kT\right)=f\left(x\right)$ o $f\left(x-kT\right)=f\left(x\right)$. Per convenzione, davanti al periodo, utilizzeremo sempre il segno +.

2. Visto che la precedente uguaglianza deve valere per qualsiasi intero *k*, se ne deduce che il dominio *D* non può essere limitato. In altre parole, le funzioni con dominio limitato non sono periodiche.

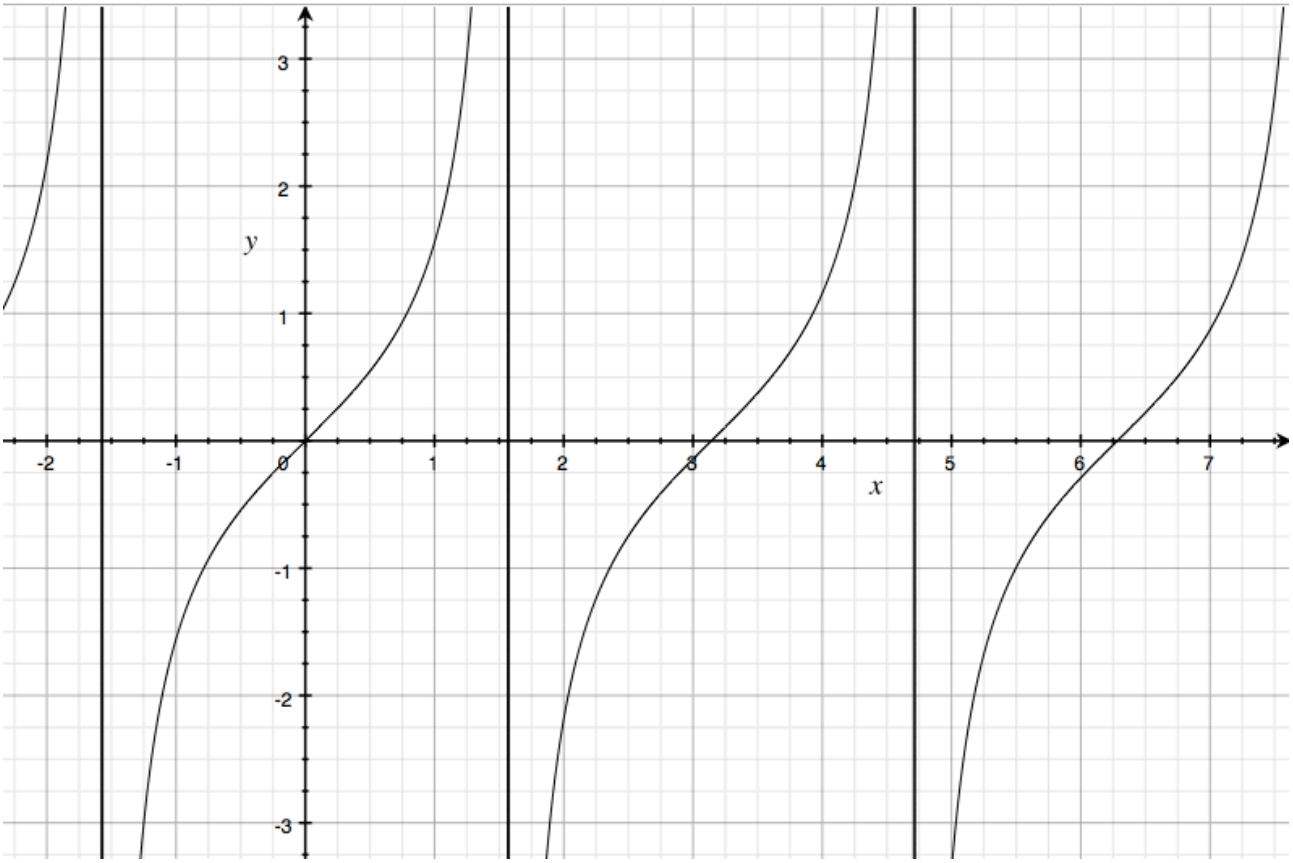
3. Se la funzione si ripete dopo ogni intervallo di ampiezza *T*, per rappresentare in modo qualitativo il grafico della funzione è sufficiente prendere in considerazione un qualunque intervallo di ampiezza *T*.

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$ hanno periodo 2π, come si evince dai loro grafici.



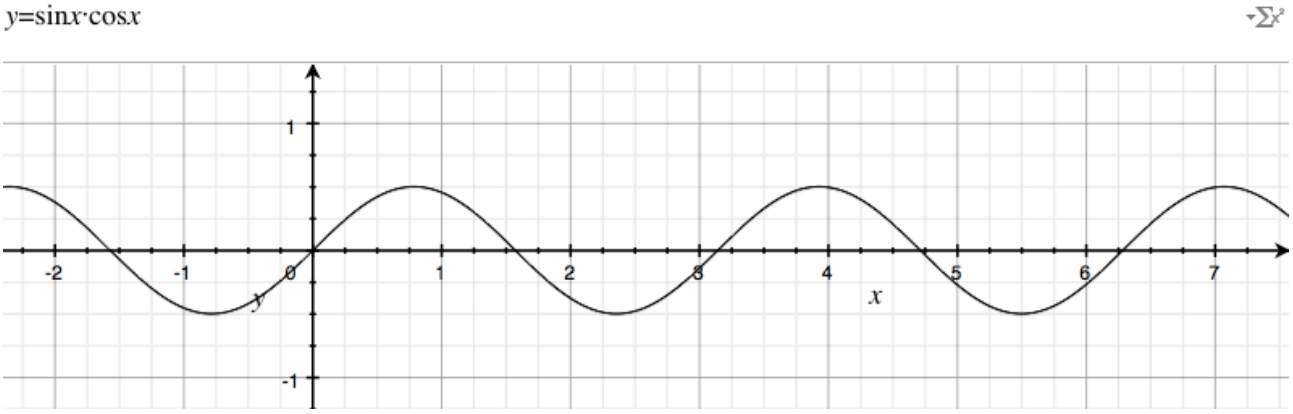


La funzione $\tan x$ ha periodo π, come si capisce dal suo grafico.

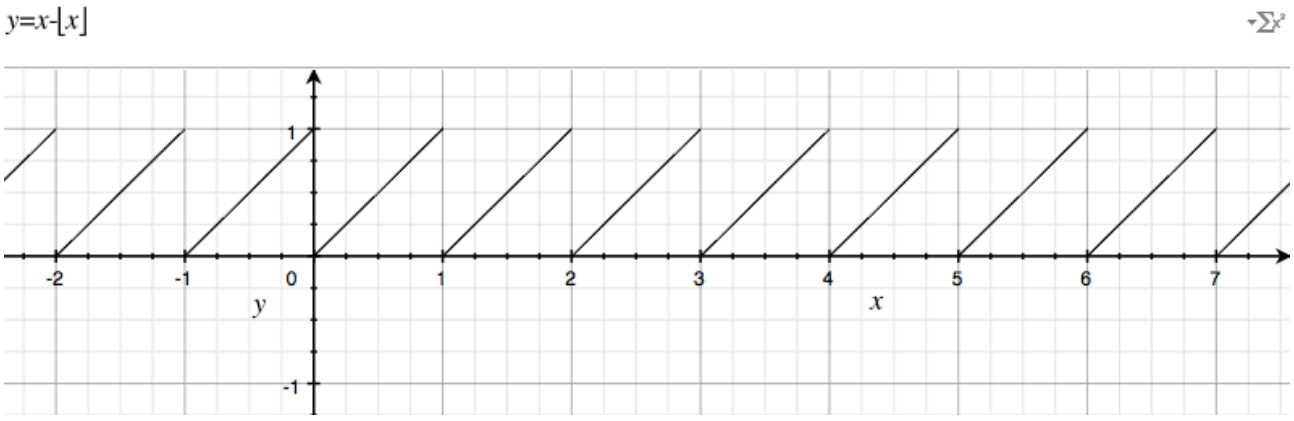


Esempio 3:

1. La funzione $y = \sin(x)\cdot\cos(x)$ ha periodo π. È possibile rendersene conto guardando il grafico della funzione:



2. Non solo le funzioni goniometriche sono periodiche. La funzione $y = x - \lfloor x \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ indica la ***parte intera*** di *x* (e.g. $\lfloor 7/3 \rfloor = \lfloor 2,\overline{3} \rfloor = 2$), ha periodo 1. È possibile rendersene conto guardando il grafico di tale funzione:



3. Non tutte le funzioni goniometriche sono periodiche. La funzione $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ non presenta periodo essendo la funzione costantemente uguale a 1. Un altro esempio è la funzione $y = \frac{1}{2}\cos x + \sin^2 \frac{x}{2}$ che è la funzione costantemente uguale a 1/2. Infine, le funzioni goniometriche inverse $\arccos x$, $\arcsin x$ e $\arctan x$ non sono periodiche (nota che le prime due hanno un dominio limitato, confronta l'Osservazione 2).

Risulta molto utile, al fine di determinare il periodo di semplici funzioni, la seguente:

Proposizione 4: Sia $y = f(x)$ una funzione periodica di periodo *T*. Allora:

1. la funzione $y = f(x) + m$, $m \in R$, ha periodo *T*;
2. la funzione $y = f(x + m)$, $m \in R$, ha periodo *T*;
3. la funzione $y = f(nx)$, $n \in R \setminus \{0\}$, ha periodo $T/|n|$;
4. la funzione $y = n \cdot f(x)$, $n \in R \setminus \{0\}$, ha periodo *T*;
5. la funzione $y = 1/f(x)$, ha periodo *T*.

Dimostrazione:

1. Sia $g(x) = f(x) + m$. Si ha $g(x + kT) = f(x + kT) + m = f(x) + m = g(x)$ per ogni $x \in D_g$ e per ogni $k \in Z$, ovvero la tesi del primo punto.
2. Sia $g(x) = f(x + m)$. Si ha $g(x + kT) = f((x + kT) + m) = f((x + m) + kT) = f(x + m) = g(x)$ per ogni $x \in D_g$ e per ogni $k \in Z$, ovvero la tesi del secondo punto.

3. Sia $g\left(x\right)=f\left(nx\right)$. Si ha $g\left(x+k\frac{T}{\left|n\right|}\right)=f\left(n\left(x+k\frac{T}{\left|n\right|}\right)\right)=f\left(nx+kT\right)=f\left(nx\right)=g\left(x\right)$ per ogni $x\in D_g$ e per ogni $k\in Z$, ovvero la tesi del terzo punto. Nel secondo passaggio si è tenuto conto che $\frac{n}{\left|n\right|}k=\pm k$ e, vista l'arbitrarietà di *k* (vedi Osservazione 2), ho considerato solo il segno +.
4. Sia $g\left(x\right)=n\cdot f\left(x\right)$. Si ha $g\left(x+T\right)=n\cdot f\left(x+T\right)=n\cdot f\left(x\right)=g\left(x\right)$ per ogni $x\in D_g$ e per ogni $k\in Z$, ovvero la tesi del quarto punto.
5. Sia $g\left(x\right)=1/f\left(x\right)$. Si ha $g\left(x+kT\right)=1/f\left(x+kT\right)=1/f\left(x\right)=g\left(x\right)$ per ogni $x\in D_g$ e per ogni $k\in Z$, ovvero la tesi del quinto e ultimo punto. □

Corollario 5: Le funzioni reciproche sec*x* , cosec *x* hanno periodo 2π. La funzione reciproca cotan *x* invece ha periodo π.

Dimostrazione: È conseguenza immediata del punto 5 della precedente proposizione. □

Proposizione 6: Sia $f:D\to R$ una funzione, $D\subseteq R$, periodica di periodo *T*. Sia $g\left(x\right)$ una funzione non periodica e non costante. Allora:

1. $f\left(x\right)+g\left(x\right), f\left(x\right)-g\left(x\right), f\left(x\right)\cdot g\left(x\right), f\left(x\right)/g\left(x\right)$ con $g\left(x\right)\neq 0, f\circ g\left(x\right)$ non sono funzioni periodiche.
2. $g\circ f\left(x\right)$ è una funzione periodica di periodo *T*.

Dimostrazione (solo punto 2.): Sia $h\left(x\right)=g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$. Si ha $h\left(x+kT\right)=g\left(f\left(x+kT\right)\right)=$ $=g\left(f\left(x\right)\right)=h\left(x\right)$ per ogni $x\in D$ e per ogni $k\in Z$, ovvero la tesi del secondo punto. □

Osservazione 7: Il punto 2. della precedente proposizione si verifica anche quando $g\left(x\right)$ è periodica di periodo T' . Ne consegue che se $g\left(x\right)$ è periodica di periodo T' allora $f\circ g\left(x\right)$ è periodica di periodo T' .

Esempio 8: Non sono periodiche le funzioni $x+\cos x$, $x^2-3\sin x$, $\log x\cdot\cos x$, $e^x/\tan x$, $\sin\left|x\right|$. Sono invece periodiche le funzioni $\log\left(\sin\left(2x\right)\right)$, $\sqrt{\sec x-1}$, e^{senx} , $\left|\cos x\right|$, $\sin\left(\cos\left(2x\right)\right)$.

La seguente proposizione è molto utile per determinare la periodicità di funzioni periodiche un po' più complesse. La dimostrazione è omessa in quanto fuori contesto. Riporterò solamente alcuni esempi.

Proposizione 9: Sia $f(x)$ una funzione che risulta essere somma o prodotto di funzioni periodiche $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ di periodo rispettivamente T_1, T_2, T_3, …. Allora:

1. $f(x)$ è una funzione costante e quindi non periodica;
2. oppure, se i periodi T_i sono commensurabili, allora la funzione f è periodica di periodo $T \le mcm\{T_i,\ i \in N\}$ e vale "=" se e solo se i T_i sono a due a due distinti;
3. oppure, se i periodi T_i sono incommensurabili, allora la funzione f non è periodica (in questo casi si dice essere ***approssimativamente periodica***).

Esempio 10:

1. Del punto 1. della Proposizione 9 sono già stati fatti svariati esempi nell'Esempio 3, terzo punto.
2. Del punto 2. della Proposizione 9 si può prendere in considerazione l'Esempio 3, primo punto: il prodotto di due funzioni di periodo 2π restituisce una funzione di periodo π.
3. La $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ con $f_1(x) = \cos(2x) - \sin x$ e $f_2(x) = \sin x$. I periodi delle sue funzioni sono $T_1 = 2\pi = T_2$ ma la funzione $f(x) = \cos(2x)$, per la Proposizione 4, ha periodo π.
4. La funzione $f(x) = f_1(x) / f_2(x)$ con $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \cos x$, ha periodo π (è la funzione tangente), mentre $T_1 = 2\pi = T_2$.
5. La funzione $f(x) = f_1(x) / f_2(x)$ con $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \cos x + 1$, ha periodo 2π, lo stesso di T_1 e di T_2.
6. Del punto 3. della Proposizione 9 considero la funzione $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ con $f_1(x) = \cos(\pi x)$ e $f_2(x) = \sin x$. I periodi delle sue funzioni sono $T_1 = 2$, $T_2 = 2\pi$ e non esiste il *mcm* dei due periodi. Quindi la funzione $f(x) = \cos(\pi x) + \sin x$ non è periodica.

Tra le funzioni periodiche sono della massima importanza quelle goniometriche. La funzione seno o, indifferentemente, coseno[*], sta alla base di tutte le funzioni periodiche, così come enunciato nel seguente:

Teorema 11 (di Fourier): Data una funzione $f(x)$ limitata, continua e periodica di periodo T, si ha:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n),$$

dove $\omega = 2\pi / T$ è chiamata ***pulsazione*** e $\varphi_n \in R$ ***fase***[†].

La dimostrazione del teorema è omessa.

[*] Si ricorda che $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$.

[†] La fase indica una traslazione del grafico del seno sull'asse x.

Il Teorema di Fourier afferma che tutte le funzioni periodiche possono essere pensate, entro certi limiti, come combinazione di sinusoidi di periodo $T_n = T/n$ e fase φ_n.

Una tra le applicazioni di questo teorema è la scomposizione di un suono nei suoi armonici, scomposizione che sta alla base dell'acustica.

Riferimenti 12:

Libro di testo

[1] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Matematica.blu 2.0, volume 4*, Zanichelli, Bologna, 2012.

Siti internet consultati

[2] http://www.batmath.it/matematica/fondamenti/periodiche/periodiche.htm

[3] http://fisicaondemusica.unimore.it/Teorema_di_Fourier.html

Software utilizzato per i grafici

[4] *Grapher 2.3* per *SOX*.