SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 1997

GARA di SECONDO LIVELLO

19 febbraio 1997

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo dimostrativo.

PRIMA PARTE

Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate non va attribuito alcun punteggio.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	D	C	E	B	D	E	B	C	D	C	B	A	D	C

SECONDA PARTE

Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 15.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei voti disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 15 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Nel caso dell'esercizio 16:

- Mostrare che i triangoli *ABD, ACD, ABC, BCD* sono isosceli vale 3 punti.

- Provare che *AD è* parallelo a BC vale 4 punti.

- Impostare le equazioni corrette nell'incognita $\alpha = A\hat{D}C$ vale 6 punti; risolvere le equazioni vale i restanti due punti.

- Trovare la soluzione corretta senza la dimostrazione vale 3 punti (questi punti non si sommano ai precedenti).

- Nel caso che lo studente presenti la soluzione alternative, con il pentagono regolare, si tolgano due punti se non vi è l'osservazione che tutti i quadrilateri con le proprietà richieste sono simili tra loro.

Nel caso dell'esercizio 17:

- La scoperta della soluzione (2p, 2p) vale 1 punto.

- La dimostrazione che almeno uno fra m ed n deve essere minore o uguale a 2p vale due punti.

- La scoperta di tutte e tre le soluzioni, anche senza la dimostrazione che sono le uniche, vale 5 punti. (Questi punti sono in alternative ai precedenti e non si possono sommare a loro).

- Oltre ai precedenti, la dimostrazione che (2p, 2p) è l'unica soluzione con m ed n entrambi multipli di *p* vale 3 punti.

- La dimostrazione che $(p^2+p, p+1)$ e $(p+1, p^2+p)$ sono le uniche altre due soluzioni vale 7 punti.

- A chi considera le due soluzioni $(p^2+p, p+1)$ e $(p+1, p^2+p)$ come un'unica soluzione vanno sottratti due punti dal totale raggiunto (va sottratto solo un punto se c'è l'osservazione che il problema è simmetrico nelle due incognite *m, n).*

Buon Lavoro!

1. La risposta è (D).
   Chiaramente, sagome girate dalla stessa parte saranno sovrapponibili perché identiche. Questo è verificato per le sagome A, B, C, E, mentre si vede che la sagoma D va girata per sovrapporsi esattamente alle altre, quindi è quella che mostra la faccia bianca.

2. La risposta è (D).
   Nella prima vendita l'antiquario ha guadagnato mezzo milione (2 incassati, $1\frac{1}{2}$ spesi).
   Nella seconda vendita l'antiquario ha guadagnato altro mezzo milione ($3\frac{1}{2}$ incassati, 3 spesi).
   Il guadagno totale è quindi 1 milione.

3. La risposta è (C).
   Poiché l'acciaio e la gomma hanno pesi specifici diversi, l'inversione dei materiali non cambia il peso totale della sbarra solo se il cilindro interno ed il rivestimento hanno lo stesso volume. Indicando con R lo spessore del rivestimento e con l la lunghezza della sbarra, si dovrà pertanto avere the:
   $\pi l = \pi((1+R)^2 - 1)l$,
   da cui, con un semplice calcolo, segue che $R = \sqrt{2} - 1$ (la soluzione negativa $R = -\sqrt{2} - 1$ è ovviamente priva di senso).

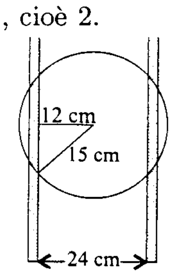
4. La risposta è (E).
   In effetti i congressisti che portano la cravatta sono esattamente 99: non possono essere 100 per la prima ipotesi e se ve ne fossero meno di 99 ce ne sarebbero due senza cravatta contraddicendo ovviamente la seconda ipotesi.

5. La risposta è (B).
   Si consideri la cifra delle unità delle potenze di 2:

   $2^1 = 2 \to 2$
   $2^2 = 4 \to 4$
   $2^3 = 8 \to 8$
   $2^4 = 16 \to 6$
   $2^5 = 32 \to 2$
   $2^6 = 64 \to 4$
   .

   Le cifre si ripetono ogni 4 e sempre nello stesso ordine
   Cioè 2^n e 2^{n+4} hanno la stessa cifra delle unità, infatti il resto della divisione per dieci è lo stesso:
   se $n > 1$, $2^{n+4} - 2^n = 2^n(2^4 - 1) = 2^n \cdot 15 = 3 \cdot 10 \cdot 2^{n-1}$
   e 1a divisione da resto 0.
   Allora il resto di $3^4 = 81$ diviso 4 è 1 cioè $81 = 4 \cdot 20 + 1$
   da cui $2^{3^4} = 2^{81} = 2^{4\cdot 20+1}$ per quanto detto ha la stessa cifra delle unità di 2^1, cioè 2.

6. La risposta è (D).
   Infatti mentre la sfera ruota, il punto di contatto con i binari si muove su una circonferenza verticale di raggio $\sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm.
   La lunghezza di questa circonferenza è $2\pi \cdot 9$ cm $= 18\pi$ cm.



7. La risposta è (E).
   Infatti $980 = 2^2.5.\ 7^2$; se esistessero due interi m, n tali che $980 = m^2.\ n^3$, almeno uno dei due dovrebbe essere divisible per 5. Ma se m è divisible per 5 allora m^2è divisible per 5^2, mentre se n è divisible per 5 allora n^3è divisible per 5^3. Poiché 980 non é divisible per 5^2(e a maggior ragione non é divisible per 5^3), ciò è impossible. Per gli altri quattro numeri valgono, ad esempio, le seguenti formule:

$$900 = 30^2.\ 1^3;\ 961 = 31^2.\ 1^3;\ 968 = 11^2.2^3;\ 972 = 6^2.33.$$

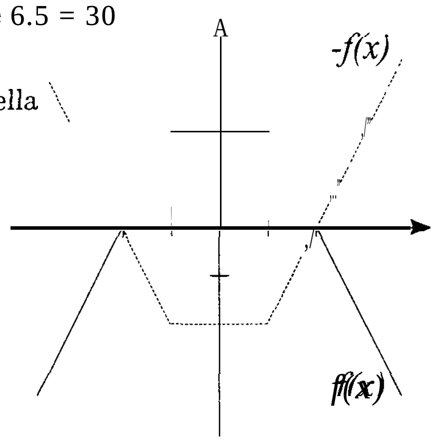
8. La risposta è (B).
Nella direzione verticale ci si muove di +2 – 4 + 6 – 8 + . . . + 1994 – 1996 quadretti = (–2) + (-2) + . ..+ (-2) = (-2) $\cdot \frac{998}{2}$ quadretti = -998
cioè 998 quadretti a SUD di O.
Analogamente, nella direzione orizzontale ci si muove di 1 – 3 + 5 – 7 +. . . + 1993 – 1995 + 1997 quadretti = (–2) + (–2) + . ..+ (–2) + 1997 = (–2) “ $\frac{998}{2}$ + 1997 = 999
cioè 999 quadretti a EST di O.

9. La risposta è (C). Infatti il primo colore può essere scelto in 3 modi e, per ciascuna scelta del primo colore, il secondo colore può essere scelto in due modi (diversi dal prime). Pertanto i primi due colori possono essere scelti in 6 modi.
Supponiamo, per esempio, che la scelta sia RB (1° rosso, 2° blu). Allora si avranno due casi: o ii 3° colore è rosso e allora necessariamente la fila è $RBRVBV$, o il terzo colore è verde e allora si possono radunare gli altri 3 calzini in tutti e 4 i modi che non cominciano con il verde:

$$RBV \to \begin{cases} BRV \\ BVR \\ RBV \\ RVB \end{cases}$$

Pertanto si hanno in totale 5 casi possibili. Ragionando analogamente per tutte le scelte dei primi 2 colori si ottiene che il numero delle succession di colori è 6.5 = 30

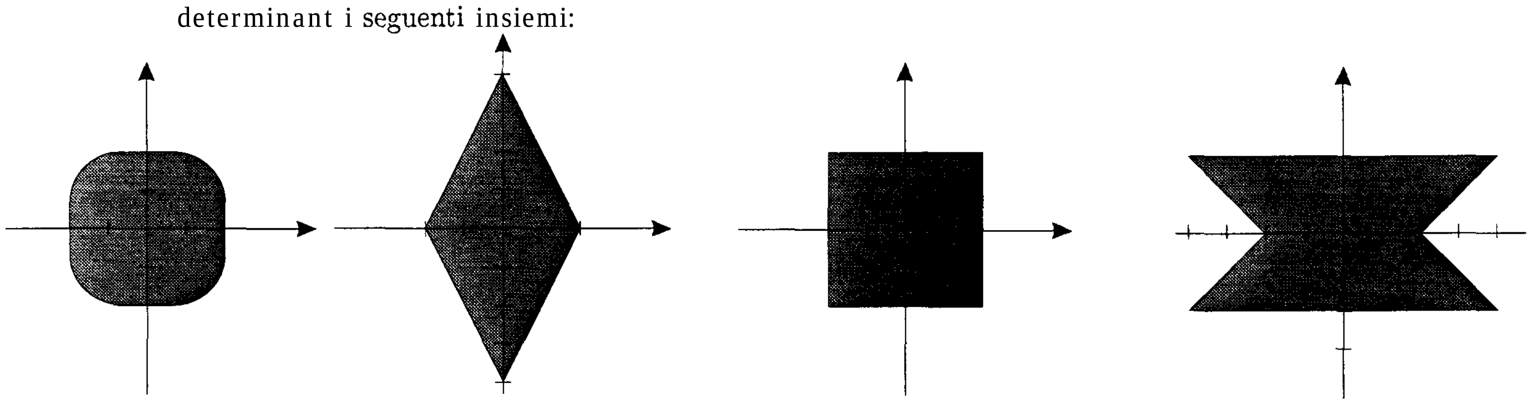
10. La risposta è (D). La disequazione (D) si può scrivere nella forma
$-f(x) \leq y \leq f(x)$,
dove $f(x) = 4 - |x+1| - |x-1|$. Distinguendo i casi $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 1$, si ricava che il grafico di $f(x)$ e $-f(x)$ è quello rappresentato nella seguente figura:



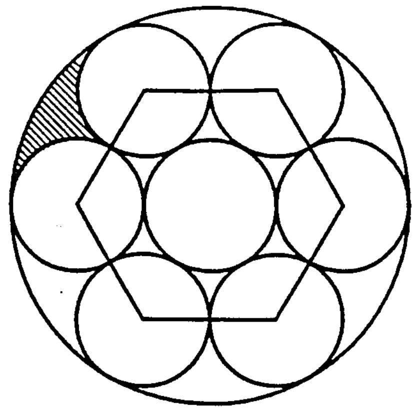
da cui segue immediatamente la tesi.
D'altra parte le altre disequazioni proposte non hanno come soluzione l'esagono disegnato in figura. Infatti:

. il punto (1,2) appartiene all'esagono, ma non verifica (A);
. il punto (O, 4) verifica (B), ma non appartiene all'esagono;
. il punto (2, 2) verifica (C), ma non appartiene all'esagono;
. il punto (2, 2) verifica (E), ma non appartiene all'esagono.

SECONDA SOLUZIONE
La soluzione del problems poteva essere ottenuta per esclusione; infatti le altre disequazioni determinant i seguenti insiemi:



11. La risposta è (C). L'esagono che ha vertici nei centri dei sei cerchi periferici è regolare ed ha lato 2. Pertanto la sua area è $6\sqrt{3}$. Ciascuna delle sei regioni dei cerchi piccoli esterna all'esagono ha area $\frac{2}{3}\pi$. Tenuto conto che l'area del cerchio grande è 9π, si ha che l'area della regione tratteggiata è
$\frac{1}{6}[9\pi - 6 \cdot \frac{2}{3}\pi - 6\sqrt{3}] = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$.



12. La risposta è (B). Poiché un numero non può avere in base 16 più cifre che in base 10, il valore cercato sarà della forma 999. . .9, dove il numero k dei 9 può crescere fino a quando, espresso in base 16 il numero corrispondente viene ad avere meno di k cifre.
Pioché $16^2 = 256$, $16^3 = 4096$, $16^4 = 65536$, $16^5 = 1024^2 > 1'000'000$, si ha che 999'999 richiede solo 5 cifre in base 16 come 99"999 che è quindi il numero cercato.
SECONDA SOLUZIONE
Un numero ha esattamente $k+1$ cifre in base a se e solo se appartiene all'intervallo $a^k \leq x < a^{k+1}$.
Pertanto, se a < b, i numeri che hanno $k + 1$ cifre sia in base a che in base b devono appartenere all'intersezione dei corrispondenti intervalli, ossia devono verificare $b^k \leq x < a^{k+1}$.
Le diseguaglianze sono compatibili se e solo se
($\star$) $b^k < a^{k+1}$;
e quindi il numero cercato è $a^{k+1} - 1$, ove k è il massimo intero che soddisfa la diseguaglianza (*).
Passando ai logaritmi, la (*) diviene

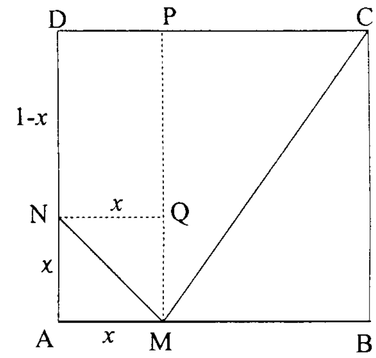
$$k \log b < (k+1) \log a, \text{ ovvero } \frac{\log b}{\log a} < 1 + \frac{1}{k}, \quad k < \frac{\log a}{\log b - \log a}.$$

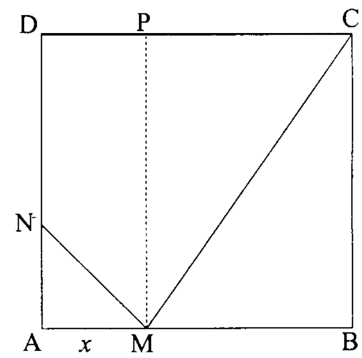
Quindi $k = \left\lfloor \frac{\log a}{\log b - \log a} \right\rfloor$ è la parte intera inferiore (i.e. il massimo intero minore) di $\frac{\log a}{\log b - \log a}$, e il numero cercato si esprime in base a con $k + 1$ cifre tutte uguali ad $a - 1$.
Posto $a = 10$, $b = 16$ si ha $\frac{\log a}{\log b - \log a} \simeq \frac{2.3}{2.8 - 2.3} \simeq 4.6$, dunque $k = 4$ e il numero cercato è 99'999.

13. La risposta è (A). Alla fine della terza partita si interrompe il gioco se almeno uno dei tre giocatori ha perso tutte le partite; in caso contrario ognuno dei tre giocatori ha vinto una delle tre partite, ed in tal caso ognuno possiede ancora tre gettoni, ed è quindi certamente in grado di giocare anche le due partite successive.
Occorre dunque calcolare la probabilità che le prime tre partite siano vinte dai tre diversi giocatori. La probabilità che il secondo vincitore sia diverso dal primo è $\frac{2}{3}$; la probabilità che il vincitore dells terza partita non sia uno dei primi due è $\frac{1}{3}$.
La probabilità cercata è dunque:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

14. La risposta è (D). Siano *PM* parallela a *AD* e *NQ* parallela ad *AB* come in figura.
Poiché chiaramente:
Area(AMN) = Area(QMN) e
Area(CPM) = Area(CBM)
si ha the:
Area(CDNM) = Area(DNQP) + Area(QMN) + Area(CPM)
è massima quando l'area di *DNQP* è massima. Detto x = *AN*, si ha:
Area(DNQP) = x(1 − x)
e questa è massima per $x = \frac{1}{2}$.
Ne segue che l'area massima di *CDNM* è uguale a:
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$.





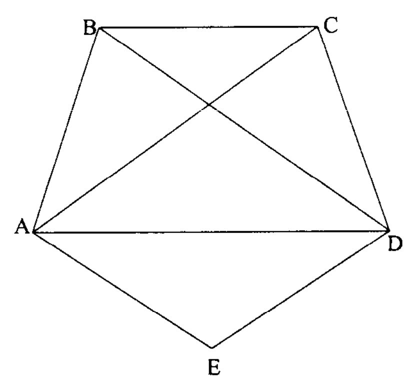
SECONDA SOLUZIONE
Si ha:
$$\text{Area}(DNMP) = \frac{[1 + (1 - x)]}{2}x = \frac{1}{2}(2x - x^2)$$
$$\text{Area}(CPM) = \frac{1}{2}(1 - x)$$
$$\text{Area}(CDNM) = \frac{1}{2}(2x - x^2) + \frac{1}{2}(1 - x) = \frac{1}{2}(1 + x - x^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4} - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$
E quindi per $x = \frac{1}{2}$ si raggiunge il valore massimo, che è $\frac{5}{8}$

15. La risposta è (C). Infatti, se d è il massimo comune divisore fra a, b, c, si deve avere:

$$a = xd \qquad b = yd \qquad c = zd$$

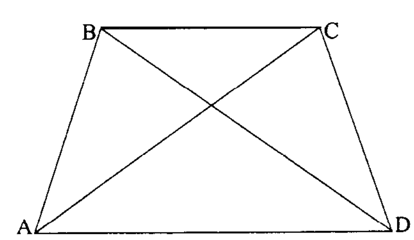
con x, y, z, d tutti dispari e x, y, z distinti. I più piccoli valori possibili per x, y, z sono, a meno dell'ordine, $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.
Poiché $c = 5d < 100$ si ha $d \leq 19$.
D'altra parte $a = 19$, $b = 57$, $c = 95$ forniscono un esempio con $d = 19$.

16. Una dimostrazione può essere la seguente:



Indichiamo con α l'angolo cercato ADC. I triangoli ABD e DCA sono isosceli e uguali fra loro, per il terzo criterio di uguaglianza.
Ne segue che BC è parallelo ad AD. Gli angoli $C\widehat{B}D$ e $B\widehat{D}A$ sono uguali perché alterni interni, d'altra parte $C\widehat{B}D = B\widehat{D}C$ in quanto anche il triangolo BCD è isoscele, pertanto $B\widehat{D}A = B\widehat{D}C = B\widehat{C}A = \frac{\alpha}{2}$
Siccome $B\widehat{C}D$ e $A\widehat{D}C$ sono supplementari, si avrà:
$B\widehat{C}A + A\widehat{C}D + A\widehat{D}C = 180°$
vale a dire
$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180°$, da cui $\alpha = 72°$

SECONDA SOLUZIONE
Alla soluzione si poteva pervenire più semplicemente osservando che in un pentagono regolare $ABCDE$ il quadrilatero $ABCD$ ha le proprietà richieste e che tutti i quadrilateri che soddisfano tali proprietà sono simili.



17. Poiché (m, n) devono essere entrambi maggiori di p, poniamo m = p + a, n = p + b, da cui $(p+a)(p+b) = p(2p + a + b)$ e, sviluppando i prodotti,
$p^2+ap+bp \quad +ab=2p^2+ap+bp$ cioè
$ab = p^2$ quindi o $a = b = p$, oppure uno fra a e b è 1 e l'altro è p^2.
Le soluzioni sono quindi:

$$(2p, 2p), \quad (p+1, p^2+p), \quad (p^2+p, p+1)$$

SECONDA SOLUZIONE
Poiché mn = $p(m + n)$ almeno uno fra m ed n è divisible per p.
Distinguiamo due casi.

(i) m e n sono entrambi divisibili per p. Posto $m = pa$, $n = pb$, con a, $b > 0$ si ha: $ab = a + b$ che ha la sola soluzione $a = b = 2$*; si ottiene dunque solo la coppia (2p, 2p).

(ii) m è divisible per p, n no. Posto $m = pa$ si ottiene $an = pa + n$, ossia $(a-1)n = pa$ Poiché p non divide n, deve dividere $a - 1$ e si può dunque porre $a = pb + 1$ e quindi $bn = a$. Allora $b(n-p) = 1$ da cui $b = 1$, $n = p+1$, $m = p(p+1)$, che corrisponde alla coppia $(p^2+p, p+1)$.

Chiaramente la coppia $(p+1, \ p^2+p)$ è fornita dal caso simmetrico di (ii), cioè n divisible per p, m no.

* Nota: Per vedere che non ci sono altre soluzioni si osservi che $ab = a + b$ implica $b = \dfrac{a}{a-1}$ e questo numero è intero solo se a = 2.