UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 1998

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	C	D	C	C	C	E	D	C	E	D	E	D	B	E

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 15.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei voti disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 15 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16, per soluzioni parziali, si attribuiscano:
a)

- 5 punti a chi osserva che la tesi è equivalente a dimostrare che CO è parallelo ad HB;

Inoltre
b)

- 3 punti a chi prova la similitudine tra CHA e BHC;
- 2 punti a chi osserva che $C\hat{A}A' = A\hat{B}C$(vedi terza soluzione);
- 5 punti a chi osserva che CAA' è isoscele;
- 2 punti a chi esprime un po' di angoli in funzione dell'angolo incognito $O\hat{C}B$.

Si intende che le quattro situazioni del punto **b)** non sono cumulabili tra di loro, ma sono cumulabili con i 5 punti della prima osservazione **a)**.

Per l'esercizio 17 si assegnino:

- 4 punti a chi scopre che 19 appartiene a X;
- 2 punti per la dimostrazione del fatto che $f(M) < M$ per $M = 10, 11, \cdots, 18$;
- altri 2 punti a chi osserva, senza una vera dimostrazione, che per numeri maggiori di 19 si ha $f(M) < M$;

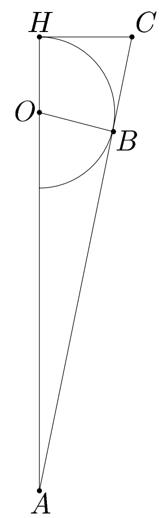
- La soluzione completa e giustificata della parte 1) vale complessivamente 12 punti.
- Altri 3 punti saranno assegnati a chi risolve anche la parte 2), indipendentemente dalla soluzione completa del punto 1).

1. La risposta è **(D)**. Sia x il numero degli uomini e y il numero delle donne. La media aritmetica è $\dfrac{35x+25y}{x+y}=31$, da cui $4x=6y$ e $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$.

2. La risposta è **(C)**. Si osservi, innanzitutto, che D è simmetrico rispetto agli assi cartesiani e rispetto alle bisettrici I–III e II–IV quadrante. Quindi è sufficiente studiare la forma del dominio D intersecato con la regione $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$, cioè $x \geq y \geq 0$. In questa regione la disequazione data diviene $x+y+x+y+x-y \leq 3$, cioè $3x+y \leq 3$. La retta $3x+y-3=0$ interseca la retta $y=0$ nel punto $(1,\ 0)$ e la retta $x-y=0$ nel punto $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$. Quindi la parte di piano limitata da $\begin{cases} y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \\ 3x+y \leq 3 \end{cases}$ è un triangolo avente vertici in $(0,\ 0)$ e nei due punti precedentemente trovati. Simmetrizzando tale figura rispetto agli assi e alle bisettrici, si ottiene la figura (C).

3. La risposta è **(D)**. Se la parte avvolta del nastro raddoppia il suo raggio maggiore, l'area del cerchio esterno quadruplica. Se dunque all'inizio l'area era A_0, dopo venti minuti vale $4A_0$ e quindi il nastro che si è avvolto in quei venti minuti si appoggia su un'area pari a $3A_0$. Quando il raggio maggiore raddoppia nuovamente l'area del cerchio esterno diventa $16A_0$ e quindi il nastro che si è avvolto in tale intervallo di tempo si appoggia su un'area pari a $12A_0$, che è il quadruplo di quella precedente. Poiché il nastro scorre uniformemente, il secondo intervallo di tempo è dunque quadruplo e cioè 1 ora e 20 minuti (si osservi che il raggio della parte in plastica della bobina non influenza il risultato).

4. La risposta è **(C)**. Il volume V di liquore è pari al volume V_c del bicchiere conico (fino al livello del liquido) meno il volume V_s della ciliegina sferica. Il raggio r di base del cono si ottiene osservando che il triangolo AOB è simile al triangolo ACH, perchè entrambi sono triangoli rettangoli e hanno l'angolo al vertice in A in comune. Si ha quindi:
$$\frac{AH}{HC}=\frac{AB}{BO} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{6}{r}=\frac{\sqrt{(6-1)^2-1^2}}{1}$$
da cui $r^2=3/2$. Il volume richiesto sarà quindi
$$V=V_c-V_s=\frac{\pi\cdot\frac{3}{2}\cdot 6}{3}-\frac{4}{3}\pi=3\pi-\frac{4}{3}\pi\cdot 1=\frac{5}{3}\pi\ (\text{cm}^3)\ .$$



5. La risposta è **(C)**. Per arrivare in stazione alle 12:30 precise, Massimo è partito da casa per la seconda volta alle 12:18. Tra le 12:00 e le 12:18 ha camminato per un tempo T percorrendo un certo tratto, che poi ha ripercorso all'indietro di corsa impiegando un tempo $\dfrac{T}{2}$. Poiché $T+\dfrac{T}{2}=18$, se ne deduce che $T=12$.

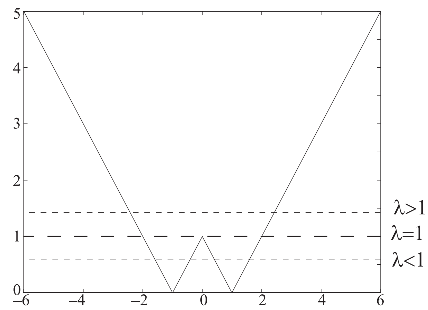
6. La risposta è **(C)**. Tutte le altre affermazioni sono deducibili. Infatti, ponendo $x=0$, si vede che c è intero. Ponendo $x=1$ si ha che $a+b+c$ è intero. Per differenza, anche $a+b$ è intero e quindi a è intero se e solo se b è intero. Ponendo infine $x=-1$ si ha che $a-b+c$ è intero e dunque $2a=(a-b+c)+(a+b)-c$ è intero in quanto somma di interi. D'altra parte ad esempio il polinomio $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}x(x+1)$, pur non avendo coefficienti interi, assume valori interi per ogni valore intero della x (questo perchè $x(x+1)$ è sempre pari in quanto prodotto di due interi consecutivi).

7. La risposta è **(E)**. Dal testo si evince che ognuno dei tre amici ha vinto due gare, totalizzando 7 punti. Ciò significa che chiunque dei tre amici ha vinto la prima gara, quello stesso ha vinto una sola delle cinque gare rimanenti, ed esattamente la sesta. Ciò accade con probabilità uguale a $\frac{1}{5}$. Analogamente, chiunque dei restanti due amici abbia vinto la seconda gara, egli stesso ha vinto la quinta, e ciò accade con probabilità $\frac{1}{3}$. È poi conseguenza delle ipotesi fatte che il terzo amico abbia vinto la terza e la quarta gara. La probabilità cercata è dunque uguale a $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

8. La risposta è **(D)**.Disegnando il grafico della funzione $y = \Big||x| - 1\Big|$ (vedi figura), si vede che ci sono tre soluzioni solo per $\lambda = 1$.

   Seconda Soluzione

   se $\lambda < 0$ l'equazione non ha soluzioni, poiché il valore assoluto di un numero reale è sempre maggiore o uguale a zero. Se $\lambda \geq 0$ si hanno due possibilità:
   $|x| = \lambda + 1$, $|x| = 1 - \lambda$
   Se $\lambda > 1$ la seconda equazione non ha soluzioni, mentre la prima ne può avere al più due. Se $0 \leq \lambda \leq 1$ si hanno le soluzioni $x = \pm(\lambda + 1), \pm(1 - \lambda)$. Gli unici casi di coincidenza fra i valori precedenti si hanno per $\lambda = 0$ ($x = \pm 1$, quindi due soluzioni) e per $\lambda = 1$ ($x = +2, -2, 0$, quindi 3 soluzioni). per tutti i valori di λ con $0 < \lambda < 1$ ci sono invece 4 soluzioni distinte.

   Terza Soluzione

   Chiamiamo f la funzione che ad ogni numero reale λ associa la quantità $\Big||x| - 1\Big|$. Si osserva che f è una funzione pari, vale a dire: $f(x) = f(-x)$ per ogni x. Quindi fissato λ se x è una soluzione dell'equazione $f(x) = \lambda$, allora anche $-x$ è soluzione. L'insieme delle soluzioni è pertanto costituito da coppie, più eventualmente la soluzione $x = 0$ (che è in effetti una coppia degenere). Noi cerchiamo tutti i λ per i quali il numero delle soluzioni è 3: 3 è un numero dispari e, per quanto visto, il numero delle soluzioni può essere dispari solo se $x = 0$ è soluzione. Il che comporta $\lambda = 1$. L'equazione in tal caso diventa $|x| = 2$, oppure $|x| = 0$, cioè $x = -2, 0, 2$. Quindi $\lambda = 1$ è un caso in cui vi sono 3 soluzioni (e per quanto visto, è anche l'unico).

9. La risposta è **(C)**. Il numero totale dei triangoli che si possono costruire è pari al numero di modi in cui si possono scegliere 3 vertici fra gli 8 del cubo, e cioè $\binom{8}{3} = 56$. Su ciascuna delle 6 facce si trovano però 4 triangoli (corrispondenti alle scelte di 3 vertici fra i 4 di un quadrato), pertanto la risposta è $56 - 6 \cdot 4 = 32$.

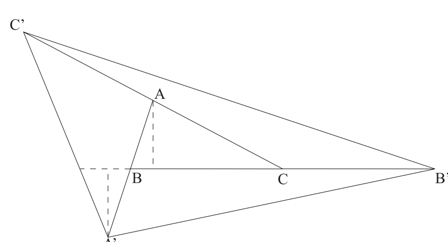
   Seconda Soluzione

   Affinché un triangolo non giaccia su nessuna delle facce è necessario che due dei suoi vertici siano sulla base inferiore ed uno su quella superiore o viceversa. Per simmetria, consideriamo solo il primo dei due casi. I due vertici sulla base inferiore possono essere:

   - o su uno stesso lato (4 possibilità), e in questo caso il vertice sulla base superiore può essere scelto in 2 modi, cioè escludendo i due vertici che stanno sulla faccia verticale che contiene i vertici sulla base inferiore;
   - o opposti (2 possibilità), e in tal caso possono essere combinati con qualunque vertice della base superiore.

   Pertanto il numero totale di combinazioni è $2(4 \cdot 2 + 2 \cdot 4) = 32$.

10. La risposta è **(E)**. Infatti il triangolo $A'BB'$ ha base BB' doppia della base BC di ABC e altezza relativa uguale a quella del triangolo originario, per cui la sua area è doppia di quella di ABC. Lo stesso dicasi per i triangoli $AA'C$ e $CB'C'$ per cui l'area di $A'B'C'$ è $2+2+2+1 = 7$ volte l'area di ABC

11. La risposta è **(D)**. Poniamo $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = x^2 - 7x + 11$. Osserviamo che $|f(x)g(x)|$ è primo se e solo se $|f(x)| = 1$ e $|g(x)|$ è primo, o viceversa. Si ha

$$\begin{array}{rcc} f(x) = 1 & \text{per} & x = -2, 1 \\ f(x) = -1 & \text{per} & x = -1, 0 \end{array}$$

e i valori $|g(-2)| = 29$, $|g(-1)| = 19$, $|g(0)| = 11$, $|g(1)| = 5$ sono tutti primi. Inoltre

$$\begin{array}{rcc} g(x) = 1 & \text{per} & x = 2, 5 \\ g(x) = -1 & \text{per} & x = 3, 4 \end{array}$$

e i valori $|f(2)| = 5$, $|f(3)| = 11$, $|f(4)| = 19$, $|f(5)| = 29$ sono tutti primi.

(Si può anche osservare che il secondo caso è simmetrico rispetto al primo, poiché $g(x) = f(x-4)$ e $f(x) = f(-1-x) = g(3-x)$).

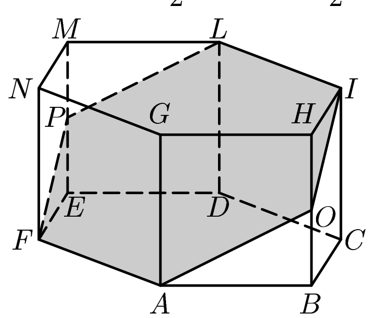
12. La risposta è **(E)**. Infatti al più una fra le affermazioni **(A)** ed **(E)** può essere vera e lo stesso vale per **(B)** ed **(E)** . Quindi **(E)** è falsa, altrimenti **(A)** e **(B)** sarebbero entrambe false. Si osservi poi che, assunte **(A)** e **(B)** vere, anche **(C)** e **(D)** sono vere.

13. La risposta è **(D)**. Facendo riferimento alla figura, si osservi che il segmento OP è parallelo ad AF e a IL, poiché le loro proiezioni sulla base del prisma sono parallele. Pertanto il poligono ottenuto sezionando il prisma è un esagono (non regolare) formato da due trapezi isosceli uguali fra loro aventi la base maggiore OP in comune e la base minore di lunghezza l. Si ha poi che $OP = EB = 2l$ in quanto il quadrilatero $EBOP$ è un rettangolo L'altezza h di ciascuno dei due trapezi si ottiene calcolando la lunghezza del segmento IA e dividendola per 2, dopo aver osservato che la lunghezza del segmento AC è il doppio della lunghezza dell'apotema dell'esagono di base:

$$h = \frac{IA}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + CI^2}}{2} = \frac{\sqrt{(l\sqrt{3})^2 + l^2}}{2} = \frac{\sqrt{3l^2 + l^2}}{2} = l$$

L'area S richiesta sarà quindi

$$S = 2 \cdot \frac{(2l + l) \cdot l}{2} = 2 \cdot \frac{3l^2}{2} = 3l^2$$



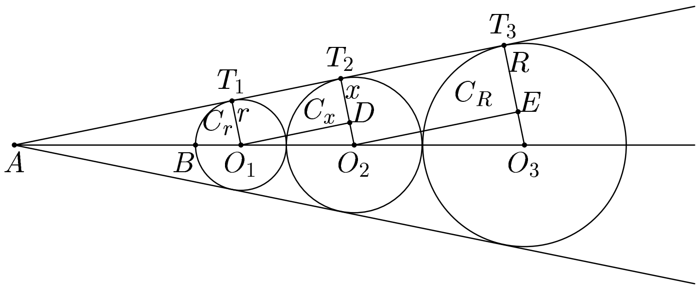
Seconda Soluzione

Per risolvere il problema si poteva anche calcolare l'area del rettangolo $AFLI$ di base l e altezza $FL = \sqrt{FD^2 + DL^2} = \sqrt{3l^2 + l^2} = 2l$ e quella dei due triangoli (identici) FPL e AIO, di base $2l$ e altezza uguale all'altezza (sulla base FD) del triangolo EFD; tale area è dunque $\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l^2$ e dunque l'area richiesta S è:

$$S = 2l \cdot l + 2\frac{l^2}{2} = 3l^2$$

14. La risposta è **(B)**. Detto A il punto d'incontro delle tangenti esterne e dette C_r, C_x e C_R le tre circonferenze di raggio r, x e R rispettivamente (con $r < x < R$), l'omotetia di centro A che trasforma C_r in C_x trasforma anche C_x in C_R. Poiché l'omotetia conserva i rapporti fra le lunghezze, si ha che

$$\frac{R}{x} = \frac{x}{r} \qquad \text{cioè} \qquad x = \sqrt{Rr}$$



Seconda Soluzione

Posto $AO_2 = y$, dalla similitudine fra i triangoli AO_1T_1 e AO_2T_2 si ha:

[1] $\dfrac{y-r-x}{r} = \dfrac{y}{x}$, cioè $x(y-x) = r(y+x)$

Dalla similitudine fra AO_2T_2 e e AO_3T_3 si ha inoltre:

[2] $\dfrac{y}{x} = \dfrac{y+x+R}{R}$, cioè $R(y-x) = x(y+x)$

Dividendo membro a membro per la [1] e la [2] ($y - x \neq 0$ perché y e x sono ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo) si ottiene:

$$\frac{x}{R} = \frac{r}{x},$$

cioè $x = \sqrt{rR}$

Terza Soluzione

Si traccino le rette passanti da O_1 e O_2 parallele ad AT_1. La prima retta interseca il raggio O_2T_2 in D e la seconda retta interseca il raggio O_3T_3 in E. Si osservi a questo punto che il triangolo O_1O_2D è simile al triangolo O_2O_3E, e che i quadrilateri $O_1O_2T_2T_1$ e $O_2O_3T_3T_2$ sono rettangoli. Si ha quindi

$$\frac{O_1O_2}{O_2D} = \frac{O_2O_3}{O_3E} \qquad \text{cioé} \qquad \frac{x+r}{x-r} = \frac{R+x}{R-x}$$

da cui si ricava $(x+r)\cdot(R-x) = (R+x)\cdot(x-r)$ e, svolgendo i prodotti, $Rx + Rr - x^2 - xr = Rx - rR + x^2 - xr$. Semplificando l'equazione precedente, si ottiene $2x^2 = 2Rr$ da cui, infine, $x = \sqrt{Rr}$.

15. La risposta è **(E)**. Un numero è un quadrato perfetto se e solo se nella sua fattorizzazione tutti i fattori primi compaiono un numero pari di volte. Pertanto

$$21ab^2 = 3 \cdot 7 \cdot ab^2 = n^2 \quad \text{se e solo se} \quad a = 3 \cdot 7 \cdot k^2 = 21k^2$$

e, ponendo $a = 21k^2$,

$$15ab = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k^2 b = m^2 \quad \text{se e solo se} \quad b = 5 \cdot 7 \cdot h^2 = 35h^2$$

Dunque $a + b = 21k^2 + 35h^2$ è minimo per $k = h = 1$, che dà $a + b = 56$.

16. Sia O il centro della circonferenza circoscritta, che indichiamo con γ. Poiché O sta sull'asse del segmento AB, la tesi è equivalente a dimostrare che CO è parallelo ad HB.

Poiché $C\hat{A}B$ è un angolo esterno al triangolo CHA, si ha che $H\hat{C}A = C\hat{A}B - C\hat{H}A = A\hat{B}C$. Pertanto i triangoli CHA e BHC sono simili. Allora $CH : HA = BH : HC$ e dunque $CH^2 = HA \cdot HB$. Per il teorema della secante e della tangente, questa uguaglianza mostra che CH è tangente a γ e dunque perpendicolare al raggio CO. Ma allora CO ed HB sono paralleli in quanto entrambi perpendicolari a CH.

Seconda Soluzione

Per ipotesi sappiamo che $C\hat{B}A = \beta$, $C\hat{A}B = 90^o + \beta$ e dunque $A\hat{C}B = 90^o - 2\beta$. Poiché il triangolo OCB è isoscele si ha che $O\hat{C}B = O\hat{B}C$. Poiché il triangolo OAB è isoscele si ha che $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \beta + O\hat{B}C = \beta + O\hat{C}B$. Infine, poiché il triangolo OCA è isoscele si ha che $O\hat{C}A = O\hat{A}C = C\hat{A}B - O\hat{A}B = 90^o - O\hat{C}B$. D'altra parte $O\hat{C}A = O\hat{C}B + A\hat{C}B = O\hat{C}B + 90^o - 2\beta$. Dal confronto di queste ultime due formule segue che $O\hat{C}B = \beta$, e quindi OC è parallelo ad HB (angoli alterni interni uguali rispetto alla trasversale CB).

Terza Soluzione

La retta per A normale a AB incontra la circonferenza in un (altro) punto A' per cui risultano eguali gli angoli $A\hat{A}'C = A\hat{B}C = C\hat{A}A'$. Allora il triangolo $AA'C$ è isoscele, l'asse di AA' è parallelo a AB, passa per C e per il centro O e dunque $HMOC$ è un rettangolo e $HM = OC$.

17

1 Se $n = 0$, $M = a_0$ ha una sola cifra e dunque appartiene X. Se $n = 1$ si ha $M = 10a_1 + a_0$, $f(M) = a_1 + 2a_0$ e affinché risulti $f(M) = M$ occorre che sia $9a_1 = a_0$ da cui $a_1 = 1$, $a_0 = 9$. Pertanto anche il numero 19 appartiene a X, mentre gli altri numeri di due cifre non appartengono a X. Si noti che la differenza $M - f(M) = 9a_1 - a_0$ è sempre maggiore o uguale a zero (ed è uguale a 0 solo per 19), per cui per tutti i numeri di due cifre diversi da 19 è $f(M) < M$. Se $n > 1$ allora $f(M) = a_n + 2a_{n-1} + \cdots + 2^n a_0 \leq 9 + 2 \cdot 9 + \cdots + 2^n \cdot 9 = 9(2^{n+1} - 1) < 18 \cdot 2^n < 10^n \leq M$. Possiamo così concludere che nessun numero con più di due cifre appartiene a X e che $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19\}$.

2 Dalla discussione precedente segue che per ogni numero che non appartiene a X si ha che $f(M)$ è <u>strettamente</u> minore di M. Se la successione M, $f(M)$, $f(f(M))$, $f(f(f(M)))$... non contenesse alcun elemento di X, sarebbe una successione strettamente decrescente di numeri naturali, il che è impossibile.