UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 1998

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	B	D	E	A	D	B	C	B	B	D	B	30	28	360

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 15.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 15 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16 si attribuiscano:

- 0 punti a chi calcola la frazione di peso complessivo dei pesci dati al primo gatto e/o la frazione di peso complessivo dei pesci rimasti nella borsa dopo la PRIMA nutrizione.
- 2 punti a chi calcola la frazione di peso complessivo dei pesci dati al SECONDO gatto.
- 2 punti a chi calcola la frazione di peso complessivo dei pesci rimasti nella borsa dopo la SECONDA nutrizione.
- 3 punti a chi osserva che ciascuno dei pesci rimasti dopo la prima nutrizione pesa percentualmente meno di $38/3$.
- 3 punti a chi osserva che ciascuno dei pesci rimasti dopo la seconda nutrizione pesa percentualmente più di $62 \cdot 38/300$.
- 5 punti per la conclusione della dimostrazione.

In caso di soluzione PARZIALE attribuire, oltre ai punti eventualmente raccolti secondo lo schema di sopra:

- 2 punti a chi dà la dimostrazione completa di qualche disuguaglianza (tipo numero pesci ≥ 8, oppure ≥ 9, oppure $\leq 12\ldots$

Tali punti, ovviamente, devono essere intesi non cumulabili con i 5 punti per la conclusione della dimostrazione, e non cumulabili nemmeno tra di loro (nel senso che se uno dimostra due disuguaglianze, tipo $8 \leq$ numero pesci ≤ 13, prende sempre 2 punti, come se avesse dimostrato una disuguaglianza sola).

Per l'esercizio 17 si assegnino:

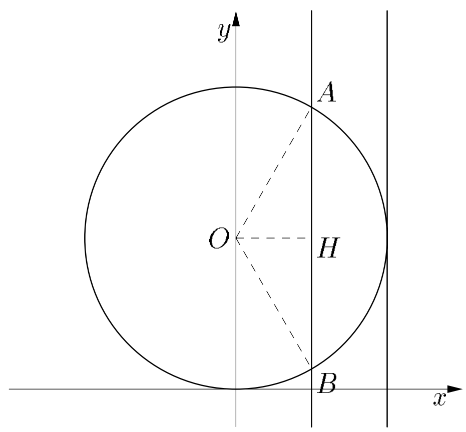
- 2 punti a chi trova solo una uguaglianza banale fra segmenti o angoli (del tipo $1 = 4$ nella terza dimostrazione)
- 5 punti a chi trova una uguaglianza non immediata fra segmenti o angoli (del tipo $1 = 3$ nella terza dimostrazione)
- 8 punti a chi dimostra che due lati del pentagono (ovvero due angoli del pentagono) sono uguali (ma non aggiunge altro)
- 12 punti a chi dimostra che il pentagono è equilatero, ovvero che è equiangolo
- 15 punti a chi dimostra che il pentagono è regolare.

Naturalmente, i punteggi precedenti, a differenza di quelli riportati a proposito dell'esercizio 16, non vanno sommati fra loro.

1. La risposta è **(D)** . Infatti
Palchi+Galleria= 960−Platea= 590 =Palchi+(Palchi−290).
Quindi 2·Palchi= 880.

2. La risposta è **(B)** . Si ha infatti
$$xy = \frac{x^3y^2}{x^2y} = \frac{4500}{150} = 30$$
e quindi
$$x = \frac{x^2y}{xy} = \frac{150}{30} = 5.$$
Ne segue poi $y = 6$, ed è facile vedere poi che questa è effettivamente una soluzione.

3. La risposta è **(D)** . La prima equazione rappresenta un cerchio di centro $(0,\ 2)$ e raggio 2; la seconda equazione rappresenta invece la striscia compresa fra le rette $x = 1$ e $x = 2$. Poiché $OH = 1$ e $OA = 2$, l'angolo $A\hat{O}H$ ha ampiezza 60° e l'angolo al centro $A\hat{O}B$ ha ampiezza 120°; l'area del triangolo AOB è uguale a $OH \cdot HA = 1 \cdot \sqrt{3}$. Quindi l'area S richiesta si trova sottraendo l'area di tale triangolo a 1/3 dell'area del cerchio:
$$S = \frac{\pi \cdot 2^2}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$



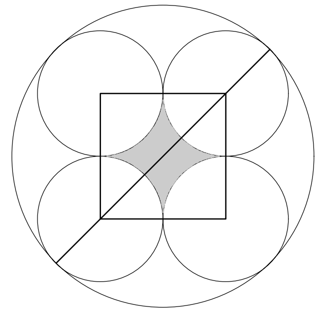
4. La risposta è **(E)** . Osserviamo innanzitutto che il rapporto fra i volumi di X e Y è sempre pari a 3 indipendentemente dai valori del raggio di base r e dell'altezza h. Indicando con a l'apotema del cono, si ha che il rapporto fra le superfici laterali vale
$$\frac{2\pi rh}{\pi ra} = 2\frac{h}{a} < 2$$
perché $h < a$. Quindi il rapporto fra le superfici laterali è sicuramente < 3, che è il valore pari al rapporto fra i volumi.

5. La risposta è **(A)** . Indichiamo con "0" la generazione di Alberto, con "−1" la generazione precedente e con "+1" la generazione successiva. In questo modo il padre di Alberto è della generazione "−1", la nuora del padre è della generazione "0", la figlia della nuora è della generazione "+1", così come il fratello della figlia. Pertanto lo zio del fratello risulta essere della generazione "0". Questo ragionamento esclude il figlio, il padre, il nonno e il suocero di Alberto.
D'altra parte consideriamo la seguente famiglia

Fabrizio Elena
Alberto Carlo — Daniela
Biagio

in cui Biagio è il padre di Alberto e Carlo, il quale ha sposato Daniela, da cui ha avuto due figli, Fabrizio ed Elena. In questo caso Alberto è zio di Fabrizio, il quale è fratello di Elena, figlia di Daniela, nuora di Biagio, padre di Alberto.

6. La risposta è **(D)** . Unendo i centri delle 4 circonferenze piccole di raggio r, si ottiene un quadrato di lato $2r$ e si ha che l'area A richiesta è data dalla differenza fra l'area di tale quadrato e l'area di uno dei cerchi piccoli, cioè $A = 4r^2 - \pi r^2 = (4-\pi)r^2$.
Il valore di r può essere determinato tracciando un diametro della circonferenza grande passante per due vertici opposti del quadrato. Si ha quindi che $2r + 2r\sqrt{2} = 2$, cioè $r = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1$. Infine si ottiene che $A = (4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2 = (4-\pi)(3-2\sqrt{2})$.



7. La risposta è **(B)** . Infatti, qualuque sia x basta porre $y = -x$ e si trova $x + y + z = z$ per ogni z. Invece, la **(A)** è sbagliata perché, semplificando, si troverebbe che c'è un y tale che per ogni z si ha $y + z = 0$, cioè che c'è un unico numero che è l'opposto di tutti i numeri. Analogamente, la **(C)** implica che ci sia un unico numero che è l'inverso di tutti i numeri. Infine, anche la **(D)** è sbagliata perché y dovrebbe essere l'inverso di x, ma $x = 0$ non ammette inverso.

8. La risposta è **(C)** . Infatti $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, e poiché i fattori di questa espressione sono divisori di M primi tra loro, il loro prodotto è un divisore di M. I numeri $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ contengono tutti un fattore primo > 100 e perciò non dividono M; infine il numero $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ è divisibile per $5^3 = 125$, mentre M non lo è.

9. La risposta è **(B)** . C'è solo la soluzione $x = 3$. Infatti, se $x \geq 4$ allora si ha $x^x \geq (2^x)^2 = 4^x$ e anche $x^x \geq (x^2)^2 = x^4$, perciò, posto $a = \max(2^x, x^2) \geq 16$, si ottiene

$$x^x - 2^x - x^2 \geq a^2 - 2a = (a-1)^2 - 1 \geq 224 > 10\ .$$

D'altra parte se $x \leq 2$ allora $x^x \leq 2^x$ (e anche $\leq x^2$), perciò $x^x - 2^x - x^2 \leq 0 < 10$.
Per verifica diretta si ottiene poi che $x = 3$ è una soluzione.

10. La risposta è **(B)** . Poiché il trapezio è isoscele, anche l'altra diagonale forma con la base maggiore un angolo di $45°$. Il triangolo avente come vertici gli estremi della base maggiore e il punto d'incontro delle diagonali è quindi rettangolo, e le diagonali sono perpendicolari. Poiché l'area di un quadrilatero avente le diagonali perpendicolari è data dal semiprodotto delle diagonali, ed entrambe le diagonali sono lunghe 22 cm, si ha che l'area è 242 cm^2.

    Seconda Soluzione

    L'area di un qualuque trapezio isoscele è uguale all'area del rettangolo con la stessa altezza, che ha per base la semisomma delle basi del trapezio. Nel nostro caso tale rettangolo è un quadrato (perché una diagonale forma un angolo di $45°$ con la base), di cui conosciamo una diagonale.

11. La risposta è **(D)** . Se in un giorno la professoressa fa n ore di lezione, le restanti $6 - n$ sono lasciate agli altri. La probabilità che l'ultima ora non tocchi a lei è dunque uguale alla probabilità che essa tocchi a qualcun altro, cioè $\frac{6-n}{6}$. Tralasciando il fattore $\frac{1}{6^5}$, si vede quindi che la probabilità che alla professoressa non tocchi mai l'ultima ora di lezione è, nei vari casi, proporzionale a:

    (A) $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$;

    (B) $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 48$;

    (C) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 64$;

    (D) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

12. La risposta è **(B)** . Osserviamo innanzitutto che ogni addendo è il quadrato del precedente. Ora $2^{(2^1)} = 4$, $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$; il terzo termine, essendo il quadrato di un intero che termina con un 6, terminerà anch'esso con un 6, e così via fino al 1999−esimo addendo. Osserviamo ora che la somma di cinque addendi che terminano con il 6 è un intero che finisce con uno zero. Pertanto, raggruppando a cinque a cinque gli ultimi 1995 addendi, si vede che la loro somma termina con lo zero. La cifra delle unità della somma proposta è dunque uguale alla cifra delle unità della somma dei primi quattro addendi, e cioè 2.

13. La risposta è 30. Occorre ovviamente che Cipollini guadagni almeno 10 punti su Abdujaparov e 8 su Boardman. Se Cipollini vince lo sprint Abdujaparov deve arrivare in una posizione dalla sesta in giù, e Boardman dalla quinta in giù. I piazzamenti ammissibili per Abdujaparov sono quindi 4 e quelli per Boardman ancora 4 (tenuto conto del piazzamento di Abdujaparov), per un totale di $4 \times 4 = 16$ diversi piazzamenti dei tre corridori che permettono a Cipollini di vincere la gara.
Se Cipollini si piazza al secondo posto un ragionamento perfettamente analogo al precedente porta a concludere che vi sono 9 diversi piazzamenti dei tre corridori che permettono a Cipollini di vincere la gara.
Se Cipollini si piazza al terzo posto ve ne sono 4, e se arriva quarto ve ne è 1.
Se Cipollini si piazza al quinto posto o ad uno peggiore non può aggiudicarsi la gara.
Il numero dei differenti piazzamenti dei tre corridori che permettono a Cipollini di vincere la gara è dunque $16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

14. La risposta è 28. Un numero n si scrive con 3 cifre decimali se e solo se $100 = 10^2 \leq n < 10^3 = 1000$, mentre si scrive con 7 cifre binarie se e solo se $64 = 2^6 \leq n < 2^7 = 128$. I numeri n cercati pertanto sono quelli nell'intervallo $100 \leq n < 128$ che sono 28.

15. La risposta è 360. Mentre a compie un giro b compie $\frac{14}{15}$ di giro, c ne compie $\frac{14}{16}\left(=\frac{7}{8}\right)$ e d ne compie $\frac{14}{18}\left(=\frac{7}{9}\right)$. Occorre dunque trovare il più piccolo intero n che moltiplicato per le frazioni precedenti dia per risultato un numero intero. Questo è ovviamente il minimo comune multiplo dei denominatori 15, 8, 9, che è proprio 360.

16. Il pescatore ha pescato 10 pesci. Sia N il numero dei pesci pescati da Andrea, e sia 100 il loro peso complessivo (non è importante precisare le unità di misura, visto che tutte le informazioni sono date in percentuale). Dopo aver nutrito il primo gatto, rimangono nella borsa $N-3$ pesci di peso complessivo pari a 62. Inoltre ciascun pesce rimasto pesa meno di $\frac{38}{3}$. I tre pesci dati al secondo gatto pesano complessivamente $\frac{62 \cdot 38}{100}$. In questo modo nella borsa rimangono $N-6$ pesci, di peso complessivo $\frac{62 \cdot 62}{100}$, ciascuno dei quali pesa meno di $\frac{38}{3}$ e più di $\frac{62 \cdot 38}{300}$. Pertanto

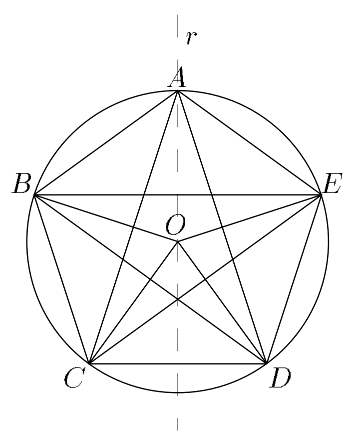
$$(N-6)\frac{62 \cdot 38}{300} \leq \frac{62 \cdot 62}{100} \leq (N-6)\frac{38}{3}$$

e dunque

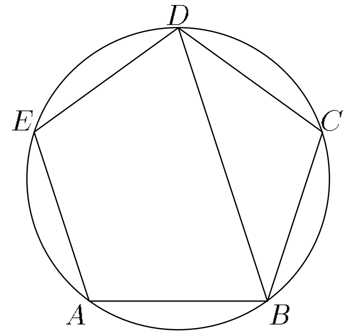
$$3 < \frac{2883}{950} = \frac{3 \cdot 62^2}{38 \cdot 100} \leq N - 6 \leq \frac{3 \cdot 62}{38} = \frac{93}{19} < 5.$$

L'unica possibilità è quindi che sia $N - 6 = 4$, e cioè $N = 10$.

17. Detto O il centro del cerchio circoscritto al pentagono $ABCDE$, si considerino i due triangoli isosceli BOE e COD: essendo BE parallelo a CD, i due triangoli hanno lo stesso asse r di simmetria. Allora, rispetto alla retta r, il punto B è il simmetrico di E, mentre il punto C è il simmetrico di D. Ne segue $BC = ED$, in quanto segmenti simmetrici rispetto ad r. In modo analogo si dimostra l'uguaglianza delle altre coppie di lati, per cui il pentagono è equilatero.
Per dimostrare che anche gli angoli del pentagono sono uguali fra loro, basta ricordare che, per ipotesi, il pentagono è inscrivibile in una circonferenza, ed osservare che a corde uguali corrispondono angoli alla circonferenza uguali.

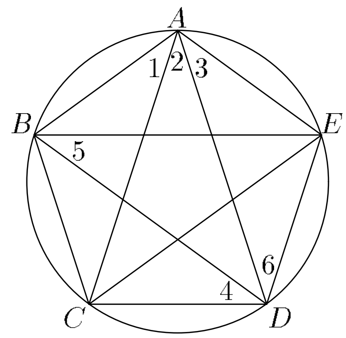


Seconda Soluzione



L'angolo $E\hat{A}B$ è supplementare di $B\hat{D}E$ poiché angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, e $A\hat{E}D$ è supplementare di $B\hat{D}E$ poiché essi sono angoli coniugati interni rispetto alle rette parallele AE e BD tagliate dalla trasversale DE.
Gli angoli $E\hat{A}B$ e $A\hat{E}D$ sono dunque uguali fra loro. Dunque tutti gli angoli adiacenti (e quindi tutti gli angoli) del pentagono sono uguali fra loro.
Il precedente ragionamento porta a concludere che il trapezio $ABDE$ è isoscele, da cui $AB = DE$. Più in generale, due lati non consecutivi del pentagono sono uguali fra loro, e dunque tutti i lati del pentagono sono uguali tra loro.

Terza Soluzione



Con riferimento al pentagono $ABCDE$ in figura, chiamiamo 1, 2, 3 gli angoli in cui le diagonali del pentagono dividono l'angolo in A; chiamiamo poi 4 l'angolo $B\hat{D}C$ e 5 l'angolo $D\hat{B}E$. Tenendo presente che il pentagono è inscrivibile, si ha
$1 = 4$ perché angoli che sottendono lo stesso arco BC,
$3 = 5$ perché angoli che sottendono lo stesso arco DE.
D'altra parte, si ha anche $4 = 5$, perché angoli alterni interni rispetto alle rette parallele BE e CD tagliate dalla trasversale BD. Si conclude così che $1 = 4 = 5 = 3$.
Se ora chiamiamo 6 l'angolo $A\hat{D}E$, si ha $2 = 6$, perché angoli alterni interni rispetto alle rette parallele AC e ED tagliate dalla trasversale AD. Ripetendo il ragionamento visto precedentemente in relazione agli angoli 1 e 3, ma facendo riferimento agli angoli di vertice D (invece che agli angoli di vertice A), si trova $4 = 6$ e, di conseguenza, $1 = 4 = 6 = 2$.
In definitiva, gli angoli 1, 2, 3, in cui le diagonali dividono l'angolo in A sono uguali fra loro; analogamente, la stessa proprietà si dimostra per gli altri angoli. Si ha anche che l'angolo $B\hat{A}E$, essendo il triplo dell'angolo 1, è uguale all'angolo $A\hat{B}C$, che è il triplo dell'angolo 5; procedendo in modo analogo si dimostra che i cinque angoli del pentagono sono uguali fra loro.
Infine, per dimostrare che anche i lati del pentagono sono uguali fra loro, basta ricordare che il pentagono è inscrivibile ed osservare che ad angoli alla circonferenza uguali corrispondono corde uguali.

Osserviamo che la sola ipotesi del parallelismo fra lati e diagonali non è sufficiente per concludere che il pentagono è regolare: ad esempio, l'ipotesi citata è soddisfatta dal pentagono avente i vertici nei punti di coordinate $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(1+\sqrt{5},\ 2)$, $(2,\ 1+\sqrt{5})$, $(0,\ 2)$. Si osservi, d'altra parte, che se si considera un qualsiasi pentagono regolare e lo si trasforma mediante un'affinità, si ottiene un altro pentagono che non è più regolare (a meno che l'affinità non sia una similitudine), ma in cui è ancora vero che ogni diagonale è parallela a un lato.