SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2000

GARA di SECONDO LIVELLO

23 febbraio 2000

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere risportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) Gli ultimi due problemi richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di questi problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________ COGNOME:____________________

Indirizzo:____________________ Città:____________________

SCUOLA:____________________ CLASSE:______ Città:____________________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–15)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione

AGIPPETROLI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

1. Un parallelepipedo retto ha spigoli di lunghezza a, b, c, con $a < b < c$. Se la lunghezza di uno degli spigoli viene aumentata di una quantità q, allora il volume del parallelepipedo aumenta. In quale dei seguenti casi si ha il massimo incremento di volume?
(A) Quando viene aumentato a
(B) quando viene aumentato b
(C) quando viene aumentato c
(D) l'incremento è lo stesso in ogni caso
(E) dipende dai particolari valori di a, b, c.

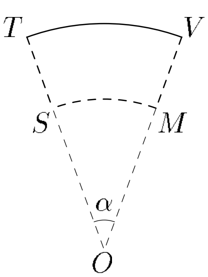
2. Sia A l'area del sottoinsieme del piano costituito dai punti (x, y) che verificano le due relazioni $x^2 + y^2 \leq 100$, $\pi x + \sqrt{17} y \leq 0$. Allora:
(A) $A < 100$ **(B)** $100 \leq A < 150$ **(C)** $150 \leq A < 200$ **(D)** $200 \leq A < 250$ **(E)** $A \geq 250$.

3. Un treno lungo 500 metri attraversa a velocità costante una galleria lunga 3 chilometri. Sapendo che sono passati 50 secondi dal momento in cui l'ultima carrozza del treno è entrata nella galleria a quando il locomotore emerge dall'altra uscita, si può affermare che la velocità del treno è:
(A) 50 km/h **(B)** 216 km/h **(C)** 252 km/h **(D)** 300 km/h **(E)** nessuna delle precedenti.

4. Qual è il numero minimo di carte che bisogna pescare da un ordinario mazzo di 52 per avere almeno il 50% di probabilità di estrarre una o più carte di cuori?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

5. Sono date le tre quantità $X = a + 7b$, $Y = 2a + 5b$, $Z = 4a + 2b$, dove a e b sono numeri reali positivi. Allora:
(A) $X < Y < Z$ **(B)** $Z < Y < X$ **(C)** $Y < X < Z$ **(D)** $Y < Z < X$
(E) l'ordine di X, Y, Z dipende dai valori di a e b.

6. Un fiume è attraversato da due ponti TS e VM; le due rive TV e SM sono due archi di circonferenza concentrici; i due ponti TS e VM sono allineati con il centro (si veda la figura). Una persona vuole arrivare in V partendo da T scegliendo il percorso più breve tra i due possibili:
(1) seguire il fiume lungo l'arco di circonferenza TV
(2) attraversare il ponte TS, seguire il fiume lungo l'altra sponda (SM) e attraversare il ponte MV.
Indichiamo con α l'angolo sotteso dai due archi di circonferenza, con R la lunghezza di OT e con r la lunghezza di OS. Su quali dati la persona deve necessariamente avere un'informazione per effettuare la scelta migliore?
(A) Su R, r e α **(B)** su α e su $R - r$ **(C)** solo su α
(D) solo su $R - r$ **(E)** il primo percorso è più breve in ogni caso.



7. Nel registrare le dichiarazioni dei tre imputati ad un processo, il cancelliere è stato piuttosto trascurato, e dal verbale risulta quanto segue:
Carlo: il colpevole è ...ario.
Dario: il colpevole è Dario.
Mario: il colpevole è ...ario.
Sapendo che il colpevole ha mentito e almeno uno degli innocenti ha detto la verità, che cosa si può concludere?
(A) Il colpevole è Dario
(B) non si può determinare il colpevole
(C) Carlo ha accusato Dario
(D) Mario ha accusato Dario
(E) Mario ha accusato Mario.

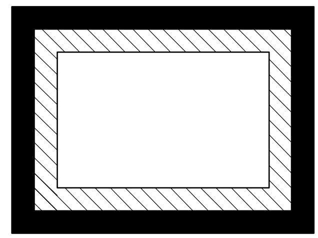
dal numero 1 in poi). Quanti biglietti sono stati emessi per la lotteria?
(A) Meno di 2000 **(B)** tra 2001 e 3000 **(C)** tra 3001 e 4000 **(D)** più di 4001
(E) non può esistere una siffatta lotteria.

9. Quante sono le terne (a, b, c) di numeri reali che verificano il seguente sistema?

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

(A) Nessuna **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** infinite.
Nota: la terna (2, 3, 8) è differente dalla terna (3, 2, 8).

10. La tela di un dipinto rettangolare è circondata da un passepartout (cioè un riquadro) largo 10 cm.
Attorno a quest'ultimo vi è poi una cornice, anch'essa larga 10 cm (nella figura, il rettangolo bianco rappresenta la tela, la superficie tratteggiata il passepartout, la superficie nera la cornice).
Si sa che l'area dell'intero quadro (compresa la cornice) è uguale al doppio della somma di quelle del passepartout e della tela.
Si può allora concludere che:



(A) sono determinate sia l'area della cornice che quelle del passepartout e della tela
(B) è determinata solo l'area della cornice
(C) è determinata solo l'area del passepartout
(D) è determinata solo l'area della tela
(E) non è determinata nessuna delle grandezze precedenti.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. In un cubo di lato 12, P e Q sono i centri di due facce che hanno in comune lo spigolo AB. Qual è il volume del tetraedro che ha per vertici i punti A, B, P, Q?

12. Le dimensioni dello schermo di un televisore sono 60 cm $\times$ 45 cm. Una telecamera inquadra interamente il televisore, e rimanda l'immagine sullo stesso, per cui dentro questo televisore se ne vede un altro e così via. Il televisore più grande che si vede dentro lo schermo ha un'area uguale a metà dell'area dello schermo. Supponendo che una persona osservi il televisore seduta a una distanza tale da non distinguere immagini di area inferiore a 1 cm^2, quanti televisori vede all'interno dello schermo?

13. Per ogni numero reale x, indichiamo con $[x]$ la "parte intera di x", definita come il più grande intero $\leq x$. Così ad esempio abbiamo che $[3/2] = 1$, $[\pi] = 3$, $[8] = 8$. Determinare quante sono le soluzioni reali positive (> 0) dell'equazione $32^x = 64^{[x]}$.

14. Quante sono le progressioni aritmetiche costituite da quattro numeri interi a, b, c, d con $1 \leq a < b < c < d \leq 100$?
Nota: Ricordiamo che a, b, c, d formano una progressione aritmetica se $b - a = c - b = d - c$.

15. Qual è il più piccolo numero intero positivo che possiede esattamente 15 divisori?
Nota: Per divisori di un numero intero positivo si intendono i divisori positivi, includendo 1 e il numero stesso. Per esempio, il numero 6 ha esattamente 4 divisori: 1,2,3,6.

Determinare tutte le coppie ordinate (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

SOLUZIONE

Si scelgano i punti H, K, M sui lati di un triangolo ABC in modo tale che AH sia un'altezza, BK sia una bisettrice e CM sia una mediana. Si indichi con D l'intersezione tra AH e BK, e con E l'intersezione tra HM e BK. Sapendo che $KD = 2$, $DE = 1$, $EB = 3$:

(i) si dimostri che HM è parallelo ad AC;

(ii) si dimostri che $AB = AC$;

(iii) si dimostri che $AB = BC$.

SOLUZIONE

SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 1999

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	E	B	E	C	D	E	C	D	72	11	4	1617	144

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte.
Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 15.

2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 15 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.

3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16:

1. L'indicazione di tutte le soluzioni senza alcuna dimostrazione vale 3 punti.

2. L'indicazione di una o piú soluzioni, ma non di tutte le soluzioni, vale 1 punto.

3. Nel caso che sia stata seguita la via indicata nella prima soluzione

   (a) La semplice osservazione che l'equazione è simmetrica nelle incognite vale 1 punto.
   (b) L'osservazione che, quindi, ci si può limitare al caso $m \leq n$ vale 1 punto.
   (c) L'osservazione che $m \leq n$ implica $m < 5$ vale 6 punti.
   (d) L'osservazione che $m > 2$ o, alternativamente, il calcolo di n fatto sostituendo $m = 1$ e $m = 2$, vale 2 punti.
   (e) I calcoli fatti sostituendo $m = 3$ e $m = 4$ valgono 2 punti ciascuno.
   (f) L'elenco completo delle soluzioni, considerando anche $m > n$, vale 1 punto.

4. Per chi ha seguito la via proposta nella seconda soluzione:

   (a) La scrittura dell'equazione $5m + 5n - 5 = 2mn$, senza nessuna manipolazione significativa, o comunque con una manipolazione non simmetrica rispetto alle variabili m, n, vale 0 punti.

(c) Il tentativo di manipolare l'equazione $5m+5n-5=2mn$ ricavandone un prodotto simmetrico rispetto alle variabili m, n, non seguita da ulteriori sviluppi, vale 1 punto.

(d) La scrittura dell'equazione $(2m-5)(2n-5)=15$ vale 6 punti.

(e) L'osservazione che l'equazione predebente dà solo un numero finito di possibilità per i fattori $2m-5$ e $2n-5$ vale 1 punto.

(f) I calcoli dei casi $2m-5=1$ e $2m-5=3$ (o i simmetrici $2n-5=1$, $2n-5=3$) valogono 2 punti ciascuno.

(g) L'analisi dei casi $2m-5=-1$, $2m-5=-3$ (o i loro simmetrici) vale complessivamente 2 punti.

(h) L'elenco completo delle soluzioni vale 1 punto.

Per l'esercizio 17, ciascuna delle tre asserzioni correttamente dimostrata vale 5 punti. Per ciascun punto dell'esercizio si possono attribuire punteggi intermedi tra 0 e 5 per dimostrazioni parziali, ad esempio assegnando:

- 3 punti se in (i) viene dimostrata la similitudine dei triangoli EMB e KAB o di due triangoli analoghi;

- 2 punti se in (ii) si conclude che $CB=2HB$, piú 1 punto a chi osserva che H è il punto medio di CB;

- 3 punti a chi in (iii), senza darne una dimostrazione completa, giustifica il fatto che D è il baricentro dicendo che il rapporto tra DB e DK è 2 e poi conclude correttamente che il triangolo è isoscele in B.

lati non incrementati. Tale prodotto è chiaramente massimo quando i due lati non incrementati sono b e c (i due più lunghi), cioè quando viene incrementato a.

2. La risposta è **(C)** . La relazione $x^2 + y^2 \leq 100$ rappresenta un cerchio con centro nell'origine e raggio 10. La relazione $\pi x + \sqrt{17}y \leq 0$ rappresenta un semipiano delimitato da una retta passante per l'origine, la quale pertanto divide il cerchio in due parti uguali. Di conseguenza l'area richiesta è metà dell'area del cerchio, cioè
$$A = \frac{1}{2}\pi 10^2 = 50\pi.$$
Poiché $3 < \pi < 4$, si ha quindi che $150 < A < 200$.

3. La risposta è **(E)** . In 50 secondi il locomotore del treno percorre $3 - 0{,}5 = 2{,}5$ chilometri. Perciò la sua velocità è
$$\frac{2{,}5}{50}\,\mathrm{km/s} = 0{,}05 \cdot 3600\,\mathrm{km/h} = 180\,\mathrm{km/h}.$$

4. La risposta è **(B)** . Infatti la probabilità di non aver estratto una carta di cuori dopo aver pescato due carte è
$$\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} = \frac{19}{34} > \frac{1}{2},$$
mentre dopo 3 carte è
$$\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50} < \left(\frac{3}{4}\right)^3 < \frac{1}{2}.$$

5. La risposta è **(E)** . Ponendo $a = 3$ e $b = 1$ si ottiene $X = 10$, $Y = 11$, $Z = 14$ (dunque $X < Y < Z$), mentre ponendo $a = b = 1$ si ottiene $X = 8$, $Y = 7$, $Z = 6$ (dunque $X > Y > Z$). Questo permette di concludere che la relazione tra due qualunque dei tre numeri X, Y, Z dipende dai particolari valori di a e b.

6. La risposta è **(C)** . Misurando l'angolo α in radianti, la lunghezza del primo percorso è $R\alpha$, mentre la lunghezza del secondo è $2(R - r) + r\alpha$. Perciò il primo percorso è quello più corto se e solo se
$$R\alpha < 2(R - r) + r\alpha,$$
cioè se e solo se
$$(R - r)(\alpha - 2) < 0.$$
Dato che $R - r > 0$ la scelta dipende solo da α.

7. La risposta è **(D)** . Poiché il colpevole ha mentito non può essere Dario, che si è autoaccusato. Poiché uno degli innocenti ha detto la verità, il colpevole finisce per ario, e dunque è Mario. Perciò Mario ha mentito, e dunque ha accusato Dario.

8. La risposta è **(E)** . Per scrivere tutti gli interi da 1 a 1000 occorre usare 300 volte la cifra 9: serve infatti 100 volte come cifra delle unità, 100 volte come cifra delle decine (10 volte per ogni centinaia) e 100 volte come cifra delle centinaia (per i numeri da 900 a 999). Lo stesso discorso vale per i numeri da 1001 a 2000 e da 2001 a 3000. Pertanto negli interi da 1 a 3000 compare 900 volte la cifra 9. Procediamo ora di 100 in 100. Per scrivere i numeri da 3001 a 3100 si usa 20 volte la cifra 9 (10 volte come cifra delle unità e 10 volte come cifra delle decine), così come in tutti i gruppi successivi di 100 interi fino a 3800 (cioè fino che il 9 non deve essere usato come cifra delle centinaia). In questo modo si dimostra che per scrivere gli interi fino a 3500 servono esattamente 1000 cifre 9 (900 per quelli da 1 a 3000 e 100 per quelli da 3001 a 3500). Di queste 1000 cifre 9, le ultime due vengono a trovarsi nel numero 3499. I casi sono quindi due: o la lotteria ha un numero di biglietti ≤ 3498, e allora servono al massimo 998 cifre 9, o la lotteria ha un numero di biglietti ≥ 3499, ed allora servono almeno 1000 cifre 9. Pertanto non può esistere una lotteria sui cui biglietti (numerati da 1 in poi) compaia esattamente 999 volte la cifra 9!

$a^2+b^2+c^2=1$ e quindi $|a|\le 1$. Ciò implica che $a^3 \le |a|^3 \le a^2$, dove il segno di uguaglianza vale se e solo se $a=0$ oppure $a=1$. Analogamente si ragiona per b e c. Perciò se uno dei tre numeri fosse diverso da 0 e da 1 si avrebbe

$$1 = a^3+b^3+c^3 < a^2+b^2+c^2 = 1,$$

che è assurdo. Di conseguenza due delle incognite devono essere uguali a 0 e una uguale a 1. Perciò esistono tre soluzioni che corrispondono alle tre possibili scelte dell'incognita da porre uguale a 1.

10. La risposta è **(D)** . Siano infatti a e b le dimensioni della tela.
Quelle del passepartout sono allora $(a+20)$ e $(b+20)$ e quelle della cornice sono $(a+40)$ e $(b+40)$.
L'ipotesi dice che si ha $(a+40)\,(b+40) = 2\,(a+20)\,(b+20)$ da cui $ab=800$, condizione ovviamente equivalente all'ipotesi stessa.
D'altra parte l'area del passepartout vale $(a+20)\,(b+20)-ab = 20(a+b)+400$ e dunque essa dipende dal perimetro della tela.
La stessa conclusione vale per l'area della cornice, che misura
$(a+40)\,(b+40)-(a+20)\,(b+20) = 20(a+b)+1200$.

11. La risposta è 72. Infatti il tetraedro $ABPQ$ può essere pensato come una piramide di base ABP e altezza QM, dove M è il punto medio di AB. Se il lato del cubo è 12, l'area di base sarà $\frac{144}{4}=36$ e l'altezza sarà $\frac{12}{2}=6$. Il volume del tetraedro sarà dunque $\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 6 = 72$.

12. La risposta è 11. L'area dello schermo è 60 cm $\times$ 45 cm $= 2700$ cm^2. Il televisore più grande inquadrato ha un'area uguale a metà dell'area dello schermo. Il secondo ha un'area uguale alla metà del primo, e cioè $1/4 = 1/2^2$ dell'area dello schermo; analogamente, il terzo televisore ha un'area uguale a $1/2^3$, il quarto un'area uguale a $1/2^4$ dell'area dello schermo, così via. Se n è il numero di televisori distinguibili dallo spettatore, si ha allora $2700/2^n \ge 1$ e $2700/2^{n+1} < 1$. Analizzando le successive potenze di 2, si vede che $n=11$ è il numero cercato, poiché $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$, quindi $\dfrac{2700}{2048} > 1$ mentre $\dfrac{2700}{4096} < 1$.

13. La risposta è 4. L'equazione si può scrivere nella forma $2^{5x} = 2^{6[x]}$, che è equivalente a $5x = 6[x]$. Poiché $x < [x]+1$, si ha che $6[x] = 5x < 5[x]+5$, da cui $[x] < 5$. Poiché per ogni $x>0$ la parte intera $[x]$ è un intero ≥ 0, rimangono solo le possibilità $[x] = 0,1,2,3,4$. Sostituendo tali valori nella relazione già trovata $5x = 6[x]$, ricaviamo che i corrispondenti valori di x sono, rispettivamente, 0, 6/5, 12/5, 18/5, 24/5. La soluzione $x=0$ è però da scartare, in quanto nel testo si richiedeva x positivo. Si verifica invece facilmente che gli altri quattro valori di x risolvono effettivamente l'equazione proposta, che ha pertanto quattro soluzioni reali e positive.

14. La risposta è 1617. Se a,b,c,d è una progressione aritmetica di quattro termini interi, anche la ragione r è un intero ≥ 1 e si ha $d = a+3r$. D'altra parte, il termine iniziale e il termine finale di una progressione aritmetica di quattro termini individuano completamente anche gli altri termini. Il numero delle progressioni aritmetiche cercate è pertanto in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri del tipo $\{a, a+3r\}$ contenute nell'insieme $\{1,\ldots,100\}$. Osservando che a e $a+3r$ danno lo stesso resto nella divisione per 3, si possono distinguere 3 casi, a seconda che tale resto sia 1, 2 o 0:

- $\{a, a+3r\} \subset X_1 = \{1,4,7,\ldots,100\}$. L'insieme X_1 consta di 34 elementi, quindi ci sono $\dbinom{34}{2} = 561$ coppie di questo tipo.
- $\{a, a+3r\} \subset X_2 = \{2,5,8,\ldots,98\}$. L'insieme X_2 consta di 33 elementi, quindi ci sono $\dbinom{33}{2} = 528$ coppie di questo tipo.
- $\{a, a+3r\} \subset X_3 = \{3,6,9,\ldots,99\}$. L'insieme X_3 consta di 33 elementi, quindi ci sono $\dbinom{33}{2} = 528$ coppie di questo tipo.

Seconda soluzione.

Indicando con $r \geq 1$ la ragione della progressione aritmetica, si ha $1 \leq a$ e $a + 3r \leq 100$, per cui $3r \leq 100 - 1 = 99$ e $r \leq 33$. Se $a, a+r, a+2r, a+3r$ è una progressione aritmetica di ragione r, si ha $a \geq 1$ e $a + 3r \leq 100$, cioè $a \leq 100 - 3r$; pertanto ci sono esattamente $100 - 3r$ progressioni aritmetiche di ragione r. Il numero totale di progressioni aritmetiche è quindi

$$\sum_{r=1}^{33}(100 - 3r) = 100 \cdot 33 - 3\sum_{r=1}^{33} r = 3300 - 3\,\frac{33 \cdot 34}{2} = 3300 - 1683 = 1617.$$

15. La risposta è 144. Supponiamo che $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ sia la scomposizione di n in fattori primi, con $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ tutti distinti e $a_i > 0$ per $i = 1, \ldots, k$. Un intero positivo d è un divisore di n se e solo se la sua scomposizione in fattori primi è del tipo $d = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ con $0 \leq b_1 \leq a_1, \ldots, 0 \leq b_k \leq a_k$ (si ammette anche l'esponente 0 perché non tutti i fattori primi di n devono comparire necessariamente anche nella scomposizione di d: ad esempio, se tutti i b_i sono uguali a 0, si ottiene il divisore $d = 1$). Le possibili scelte di d corrispondono dunque alle possibili scelte della sua fattorizzazione, e cioè $a_1 + 1$ scelte per l'esponente b_1 (tutti gli interi $0, 1, \ldots, a_1$), ..., $a_k + 1$ scelte per l'esponente b_k. Combinando queste scelte in tutti i modi possibili, si ottiene che il numero n ha esattamente $(a_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (a_k + 1)$ divisori.

Per avere esattamente $15 = 3 \cdot 5$ divisori, ci sono dunque solo le seguenti possibilità:

(i) $k = 1$, $a_1 = 14$ quindi $n = p_1^{14}$. Il più piccolo intero positivo di questo tipo è evidentemente $2^{14} = 16384$.

(ii) $k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ quindi $n = p_1^2 p_2^4$. Il più piccolo intero positivo di questo tipo è evidentemente $2^2 3^4 = 324$.

(iii) $k = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$ quindi $n = p_1^4 p_2^2$. Il più piccolo intero positivo di questo tipo è evidentemente $2^4 3^2 = 144$.

Pertanto il numero cercato è 144.

16. Consideriamo dapprima le coppie (m, n) con $m \leq n$. Abbiamo

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{mn} < \frac{2}{m},$$

da cui $m < 5$. Inoltre

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} > \frac{1}{m},$$

da cui $m > \frac{5}{2}$, e cioè, essendo m intero, $m \geq 3$. Ponendo $m = 3$ si ottiene

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} = \frac{2}{5},$$

da cui $n = 10$. Ponendo $m = 4$ si ottiene

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n} = \frac{2}{5},$$

da cui $n = 5$. Considerando infine il caso simmetrico in cui $n \leq m$ si ottiene che le coppie delle soluzioni devono appartenere all'insieme $\{(3, 10), (4, 5), (10, 3), (5, 4)\}$. È infine immediato verificare che le quattro coppie precedenti sono effettivamente soluzioni dell'equazione data.

Seconda soluzione.

Moltiplicando l'equazione data per $10mn$ (ricordiamo che m e n sono diversi da zero), si ottiene

$$4mn - 10m - 10n + 10 = 0,$$

ossia

$$(2m - 5)(2n - 5) = 15.$$

Anche qui supponiamo dapprima che $m \leq n$. Le uniche coppie di numeri interi che danno per prodotto 15, con il primo termine minore o uguale al secondo, sono $(3, 5)$, $(1, 15)$, $(-5, -3)$ e $(-15, -1)$.

- Ponendo $2m-5=1$, $2n-5=15$, si ottiene $(m,n)=(3,10)$.
- Ponendo $2m-5=-5$, $2n-5=-3$, si ottiene $m=0$, che non è accettabile.
- Ponendo $2m-5=-15$, $2n-5=-1$, si ottiene $(m,n)=(-5,2)$, che non è accettabile in quanto m è negativo.

Considerando poi le coppie (m,n) con $n<m$, si ottiene che le soluzioni sono $\{(3,10),(4,5),(10,3),(5,4)\}$.

17. i) I triangoli EMB e KAB sono simili perché

$$MB : AB = EB : KB.$$

e l'angolo in B è in comune. Quindi $K\hat{A}B = E\hat{M}B$ e $CA \parallel MH$.

ii) Per il teorema di Talete si ha $CB = 2HB$, da cui deduciamo che $CH = HB$ e che AH è la mediana relativa a CB. Visto che AH per ipotesi è anche l'altezza si ha che il triangolo ABC è isoscele.

iii) Poiché $BD = 2DK$, il baricentro di ABC si trova sulla retta r passante per D e parallela ad AC (per il teorema di Talete). D'altra parte, il baricentro si trova anche sulla mediana AH, e quindi il baricentro è il punto D di intersezione fra queste due rette (si noti che le due rette non sono parallele, in quanto AC è un lato e AH è una mediana del triangolo ABC). Pertanto BK passa per il baricentro e quindi è una mediana. Visto che BK è anche bisettice, $BA = BC$.

Seconda Soluzione

iii) BK è la mediana relativa a CA. Infatti, supponiamo per assurdo che il punto medio di CA sia $K' \neq K$. Visto che il punto di intersezione di BK' con CM (che chiamiamo D') è il baricentro di ABC, si avrebbe

$$\frac{K'B}{D'B} = \frac{3}{2} = \frac{KB}{DB}.$$

Quindi, dato che $K\hat{B}K' = D\hat{B}D'$, il triangolo $DD'B$ sarebbe simile a $KK'B$ e CM sarebbe parallelo a CA, che è assurdo. Ne deduciamo che K e K' sono lo stesso punto e che BK è mediana. Visto che per ipotesi BK è anche bisettrice, ABC è isoscele anche in B e quindi è equilatero.