UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2000

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	C	C	E	E	C	D	E	C	9	315	64	14	5

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nell'esercizio 16 nel caso di una soluzione nelle linee della soluzione proposta:

(i) scoprire che uno solo fra i triangoli AHB e AKB ha i vertici sulla circonferenza di centro M vale 1 punto, mentre scoprire entrambi (cioè trovare che i punti A, H, K e B stanno sulla stessa circonferenza) vale 4 punti;
(ii) trovare che $MH = MK$ vale un ulteriore punto;
(iii) calcolare $\widehat{CBH}$ o $\widehat{CAK}$ vale 1 punto;
(iv) scoprire che $\widehat{HMK} = 60°$ vale 5 punti;
(v) accorgersi di aver tutti gli elementi per concludere vale 1 punto.

Nel caso di una soluzione diversa da quella proposta:

(i) una soluzione completa vale 12 punti, anche se fa uso di trigonometria o risoluzione di sistemi a molte equazioni e incognite;
(ii) trovare che il triangolo HMK è isoscele vale 5 punti;
(iii) trovare che il triangolo HMK ha un angolo di 60° vale 6 punti;
(iv) avere tutti gli elementi ma non riuscire a concludere vale 11 punti.

Per l'esercizio 17, nel caso di una soluzione nelle linee della prima soluzione proposta:

(i) la fattorizzazione $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ vale 1 punto;

(ii) la scoperta che $a+b$ deve essere un divisore di 91 vale 1 punto;
(iii) la discussione di un caso $a+b=d$, dove d è positivo, vale 2 punti; la discussione di 2 o 3 casi vale 3 punti; la discussione di tutti e 4 i casi vale 4 punti;
(iv) la considerazione, sia essa esplicita o implicita nella discussione di cui al punto (iii), che l'equazione è simmetrica rispetto ad a e b vale 1 punto;
(v) la discussione dei casi in cui $a+b<0$, o la dmostrazione che essi sono impossibili, vale 5 punti.

Nel caso di una soluzione nelle linee della seconda soluzione proposta:

(i) la discussione completa del caso in cui a e b sono entrambi maggiori o uguali a zero vale 5 punti;
(ii) la discussione completa del caso in cui uno dei due numeri è negativo vale 7 punti.

In generale, al di fuori degli schemi delle soluzioni proposte:

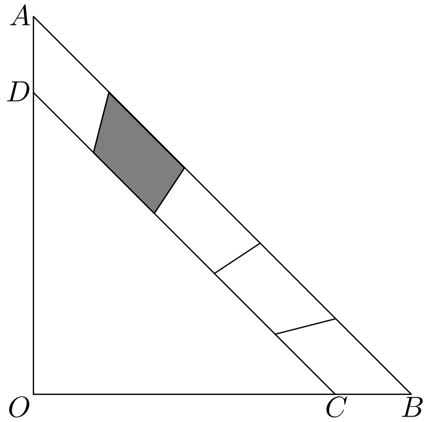
(i) qualsiasi soluzione completa deve essere valutata 12 punti;
(ii) trovare una sola fra le soluzioni $(3,4)$ e $(4,3)$ vale 0 punti;
(iii) trovare entrambe le soluzioni $(3,4)$ e $(4,3)$ vale 1 punto;
(iv) trovare una sola fra le soluzioni $(6,-5)$ e $(-5,6)$ vale 1 punto;
(v) trovare entrambe le soluzioni $(6,-5)$ e $(-5,6)$ vale 2 punti;
(vi) *se non sono esibite soluzioni*, la considerazione che l'equazione è simmetrica in a e b vale 1 punto.

1. La risposta è **(C)** . Dividendo il carico di sabbia in 12 mucchietti uguali, si ha che l'autocarro grande può trasportare 3 mucchietti per ogni viaggio, mentre l'autocarro piccolo può trasportarne solo 1. Dopo 3 viaggi, l'autocarro grande avrà trasportato 9 mucchietti, mentre quello piccolo 3; in totale 12 mucchietti, cioè tutto il carico di sabbia.

2. La risposta è **(B)** . Se facesse soltanto un giro, il pilota commetterebbe un errore di mezzo chilometro nello stimare la lunghezza del circuito (ad esempio, se sul contachilometri leggesse 5 km, la lunghezza esatta del circuito potrebbe variare tra 5 km e poco meno di 6, per cui stimando la lunghezza 5,5 km è sicuro di non sbagliare per più di 500 m. Se facesse solo due giri, l'errore commesso sarebbe la metà, cioè 250 m. Dopo 3 giri l'errore sarebbe $\frac{500}{3}$ metri.

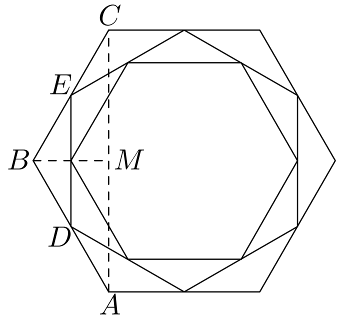
   Dopo n giri l'errore che commette nella sua stima è $\frac{500}{n}$ metri, da cui si deduce che il valore di n richiesto è 17.

3. La risposta è **(C)** . Con riferimento alla figura a fianco, si ha che $\text{area}(ABCD) = \text{area}(OAB) - \text{area}(OCD) = \frac{50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm}}{2} - \frac{40 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}}{2} = 450 \text{ cm}^2$.

   L'area della regione in grigio è $\frac{1}{5}$ dell'area di $ABCD$, perché anche il segmento CD viene diviso in 5 parti uguali dalle semirette uscenti da O e i 5 trapezi in cui viene suddiviso $ABCD$ hanno le stesse basi e la stessa altezza, e sono quindi equivalenti. L'area richiesta è quindi 90 cm^2

4. La risposta è **(C)** . Con riferimento alla figura a fianco, si ha che $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $AC = 2 \cdot AM$ e quindi $AC = AB \cdot \sqrt{3}$. Inoltre DBE è simile ad ABC con rapporto di similitudine $\frac{1}{2}$, quindi $DE = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Ogni volta che si inscrive un nuovo esagono, il suo lato sarà lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}$ volte quello del precedente, di conseguenza il rapporto fra i lati di P_3 e P_1 è $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ e il rapporto fra le aree è $\frac{9}{16}$.

5. La risposta è **(E)** . Infatti le risposte **(B)** e **(D)** sono entrambe coerenti con le condizioni poste.

6. La risposta è **(E)** . Si ha $DDD = D \times 111 = D \times 3 \times 37$. Ne segue che uno dei fattori di DDD, per esempio AC, deve essere divisibile per 37. Poiché AC ha solo due cifre, $AC = 37$ oppure $AC = 74$. In ogni caso AC non è divisibile per 3, quindi BC deve essere divisibile per 3. Se $AC = 37$, allora l'ultima cifra di BC deve essere uguale a 7. Il più piccolo numero divisibile per 3 che termina con la cifra 7 è 27: se $BC = 27$, si ha $37 \times 27 = 999$, e l'equazione data è soddisfatta. Se $BC > 27$, allora $37 \times BC > 1000$, quindi l'equazione data non è possibile. Se $AC = 74$, l'ultina cifra di BC deve essere uguale a 4: ma il più piccolo numero divisibile per 3 che termina con la cifra 4 è 24, e già in questo caso si ha $74 \times 24 > 1000$. Pertanto necessariamente $AC = 37$, $BC = 27$ (o viceversa) e $DDD = 999$, da cui $A + B + C + D = 3 + 2 + 7 + 9 = 21$.

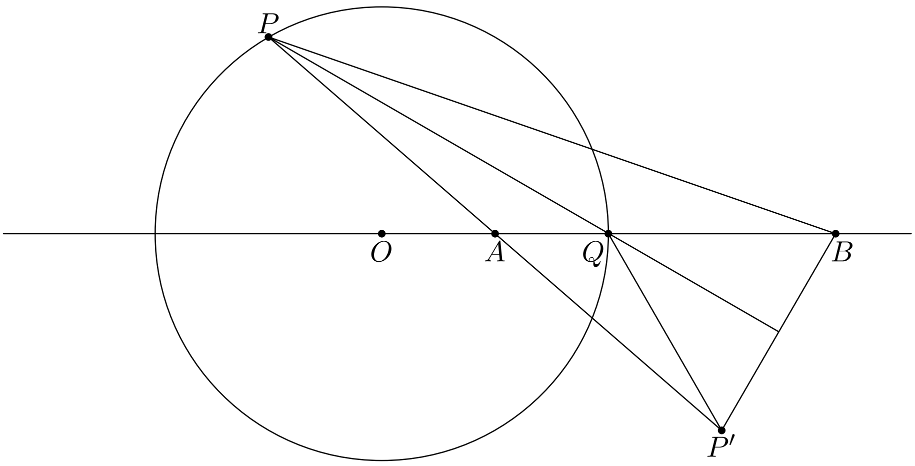
7. La risposta è **(C)** . Dopo aver notata l'ovvia invarianza per rotazioni intorno alla retta passante per A e B, il problema piano è classico, ed il luogo geometrico richiesto è tradizionalmente noto col nome di *"circolo di Apollonio"*. Proponiamo varie soluzioni di questo problema, che possono essere presentate agli alunni in sede di correzione della prova.

   Prima soluzione: Siccome le rotazioni di asse AB mutano l'insieme in questione in se stesso, basta considerare una sezione S con un piano passante per l'asse AB e dimostrare che questa è una circonferenza con centro su tale asse.

   Fissato il piano, introduciamo in esso un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con origine in A e semiasse positivo delle ascisse passante per B. Scegliamo come unità di misura la lunghezza del segmento AB, cosicché si avrà $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (1,0)$. Un generico punto (x,y) del piano appartiene alla sezione S se e solo se $(x-1)^2 + y^2 = 4(x^2+y^2)$. Questa relazione può essere riscritta in modo equivalente come $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ e dunque S è la circonferenza di centro $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ e raggio $\frac{2}{3}$.

Il problema può essere risolto anche senza introdurre le coordinate cartesiane. Ad esempio, basandosi sul fatto che una delle cinque risposte deve per forza essere considerata giusta, è sufficiente trovare qualche punto di S per poter escludere le risposte sbagliate. I punti forse più semplici da individuare sono i due punti sulla retta AB ed i due punti C, D tali che BCD sia un triangolo equilatero con altezza BA.

Seconda soluzione: Indichiamo con Q quel punto del segmento AB tale che $QB = 2QA$ e con O il suo simmetrico rispetto ad A.

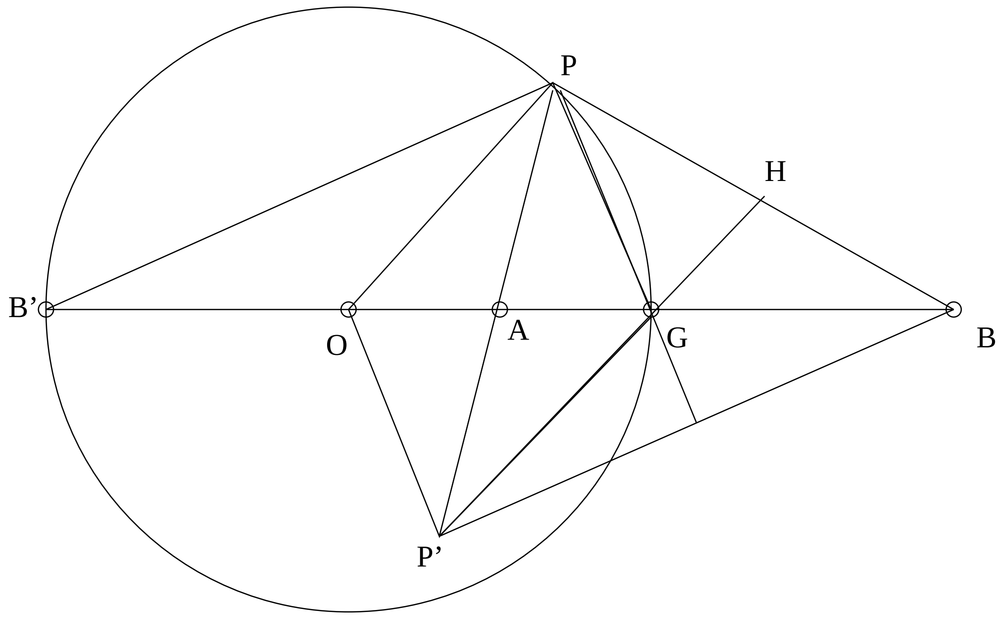


Preso un punto P della sezione S, vogliamo dimostrare che $PO = QO$. Se P giace sulla retta passante per A, B la verifica è immediata. Se P non è allineato con A e B allora indichiamo con P' il suo simmetrico rispetto ad A. Siccome $P \in S$, deduciamo che $BP = PP'$, cioè che il triangolo BPP' è isoscele. Notiamo che BA rappresenta una mediana di tale triangolo e che Q è necessariamente il baricentro di BPP', proprio per la relazione $BQ = 2QA$. Dunque Q sta sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{BPP'}$ (questa affermazione poteva essere dimostrata anche ricorrendo al *teorema della bisettrice*). Ne segue $PO = QP'$, per simmetria rispetto ad A, $QP' = BQ$, per simmetria rispetto alla retta PQ, e $BQ = QO$ per costruzione. In conclusione $PO = QO$, e quindi il luogo dei punti S è contenuto nella circonferenza di centro O e raggio OQ.

Viceversa, se $PO = OQ$ allora vale la relazione $AO \cdot BO = PO^2$, che può essere riscritta come $AO : PO = PO : BO$. Pertanto i triangoli BPO e PAO, avendo anche un angolo in comune, sono simili. Ne segue $PB : PA = BO : PO$, da cui $PB = 2PA$, cioè $P \in S$.

Terza soluzione: Siccome le rotazioni di asse AB mutano l'insieme in se stesso, basta considerare una sezione con un piano passante per l'asse AB e dimostrare che questa è una circonferenza con centro su tale asse.

Fissato il piano si indichi con B' il simmetrico di B rispetto ad A, con G il punto del segmento AB la cui distanza da B è il doppio di quella da A, e con O il simmetrico di G rispetto ad A. Adesso vogliamo dimostrare che la sezione dell'insieme richiesto è costituita da tutti e soli i punti della circonferenza di centro O e raggio OG.



La dimostrazione si articola in due punti:

- Tutti i punti cercati appartengono alla circonferenza.
  Infatti sia P un punto tale che $2PA = PB$; voglio dimostrare che $OP = OG$. Sia P' il simmetrico di P rispetto ad A; BA è la mediana del triangolo PBP', ma ,per come è stato costruito, G risulta essere il baricentro di tale triangolo, quindi la mediana relativa al lato $P'B$, e la mediana PH passano per G; inoltre $PA = PH$. Poiché $P'PB$ è isoscele, PG è anche bisettrice di $\widehat{P'PB}$. I triangoli PAG e PHG sono uguali perché hanno $PA = PH$, PG in comune e $\widehat{APG} = \widehat{GPH}$, da cui $\widehat{PGA} = \widehat{PGH}$. Dalla costruzione fatta $POP'G$ é un parallelogramma; si ha $\widehat{OPG} = \widehat{PGH}$ da cui ne segue $\widehat{OPG} = \widehat{OGP}$ e quindi la tesi.

- Tutti i punti della circonferenza appartengono all'insieme cercato.
  Sia P un punto sulla circonferenza; voglio dimostrare che $2PA = PB$. Sia P' il simmetrico di P rispetto ad A. Per quanto già visto G è sempre il punto di incontro delle mediane del triangolo PBP'. Ora, poiché il triangolo OPG è isoscele per costruzione, si ha che $\widehat{OPG} = \widehat{OGP}$, inoltre, con argomento identico al precedente, si osserva che $P'H$ è parallelo a OP. Quindi $\widehat{OPG} = \widehat{PGH}$ e pertanto $\widehat{PGH} = \widehat{PGA}$. Infine, poiché MG passa per i punti medi di OB e di PB si ha che MG è la metà di OP e quindi per costruzione è uguale ad AG. Pertanto i due triangoli APG e HPG sono uguali da cui $PA = PH$ e quindi $2PA = PB$.

8. La risposta è **(D)** . Si hanno infatti due possibilità: o Lorenzo è sano ed il test ha sbagliato, oppure Lorenzo è malato ed il test ha fornito la risposta corretta. La prima situazione ha probabilità $\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{99}{10000}$, mentre la seconda ha probabilità $\frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{99}{10000}$. Pertanto, siccome i due eventi sono equiprobabili, Lorenzo è sano con probabilità $\frac{1}{2}$.

9. La risposta è **(E)** . Infatti in tal caso $y^x < x^x < (x^x)^{y/x} = x^y$ (per giustificare la seconda disuguaglianza si noti che un numero minore di 1 aumenta se è elevato ad un esponente minore di 1).
   Per vedere che le altre condizioni non sono sufficienti basta porre $x = 2, y = 4$ (ad **(A)**), $x = 4, y = 2$ (a **(B)**), $x = \frac{1}{2}, y = 4$ (a **(C)**), $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}$ (a **(D)**).

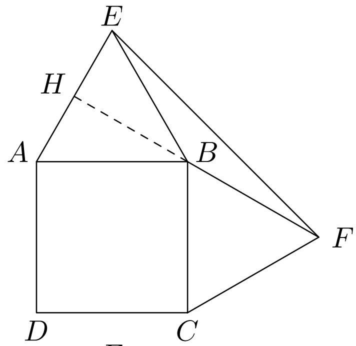
10. La risposta è **(C)** . Infatti Marco alla prima estrazione ha $\frac{3}{5}$ di probabilità di estrarre una pallina bianca e $\frac{2}{5}$ di estrarre una pallina nera. Nel primo caso nella scatola ci saranno, prima della seconda estrazione, 4 palline bianche e 2 nere, per cui Marco avrà $\frac{2}{3}$ di probabilità di estrarre una pallina bianca. Nel secondo caso, invece, Marco avrà probabilità $\frac{1}{2}$, dal momento che nella scatola saranno presenti 3 palline bianche ed altrettante nere. La probabilità totale che la seconda volta Marco estragga una pallina bianca sarà quindi uguale a $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Seconda soluzione: Prima della seconda estrazione saranno presenti nella scatola 6 palline: 3 bianche, 2 nere ed una, quella che è stata aggiunta in seguito, che ha $\frac{3}{5}$ di probabilità di essere bianca e $\frac{2}{5}$ di essere nera. Pertanto Marco alla seconda estrazione, sia che estragga una pallina che era già presente nella scatola, sia che estragga la pallina aggiunta in un secondo momento, avrà sempre $\frac{3}{5}$ di probabilità di estrarre una pallina bianca.

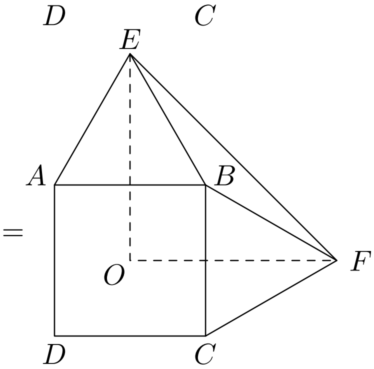
11. La risposta è 9. Infatti il tetraedro $ABPQ$ può essere pensato come una piramide di base ABP ed altezza QH. Ricordando che P e Q sono i baricentri delle facce su cui si trovano e che la distanza tra il baricentro di un triangolo ed un lato è esattamente un terzo dell'altezza del triangolo relativa a quel lato, si deduce che l'area del triangolo ABP è un terzo dell'area di una faccia del tetraedro regolare e che QH è anch'essa un terzo dell'altezza del tetraedro iniziale. Quindi il volume di $ABPQ$ sarà $\frac{1}{9}$ del volume del tetraedro iniziale.
Notiamo che la regolarità del tetraedro iniziale non influisce sul risultato, a patto di prendere P e Q coincidenti coi baricentri dei triangoli ABC e ABD.

12. La risposta è 315. Cinque numeri consecutivi possono essere scritti nella forma $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ e la loro somma è $5x$. D'altra parte, se $n = 5x$, allora n è la somma dei cinque numeri consecutivi $x-2, x-1, x, x+1, x+2$. Analogamente, n è somma di 7 numeri consecutivi se e solo se n è della forma $7y$ (i 7 numeri consecutivi essendo $y-3, y-2, y-1, y, y+1, y+2, y+3$). Infine, 6 numeri consecutivi possono essere scritti nella forma $z-2, z-1, z, z+1, z+2, z+3$, e la loro somma fa $6z+3$. Dunque n è somma di 6 numeri consecutivi se e solo se è della forma $n = 6z+3$, cioè se e solo se n è divisibile per 3 ma non per 6. I numeri divisibili contemporaneamente per 5, per 7 e per 3 sono i multipli di $5 \times 7 \times 3 = 105$, e cioè $105, 210, 315, 420, \ldots$. Tra essi, quelli non divisibili per 6 sono esattamente quelli dispari, e cioè $105, 315, \ldots$. Il numero cercato è quindi 315.

13. La risposta è 64. Si prolunghi BF fino a incontrare AE in H; si ha $A\widehat{B}H = 180° - F\widehat{B}C - C\widehat{B}A = 30°$ e, dato che $B\widehat{A}E = 60°$, si deduce che $A\widehat{H}B = 90°$ cioè $FH \perp AE$. EH è quindi altezza del triangolo EBF relativa a BF, inoltre $EH = \frac{1}{2}AE = 8$ m (perchè in un triangolo equilatero le altezze sono anche mediane).
L'area richiesta sarà quindi $\frac{BF \cdot EH}{2} = \frac{16 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}}{2} = 64 \text{ m}^2$



Seconda soluzione: Congiungendo E e F con il centro O del quadrato si vede subito che il triangolo BEF si ottiene da OEF togliendo un quarto del quadrato iniziale e metà di ciascuno dei triangoli costruiti nel testo. Siccome le altezze di questi ultimi misurano $8\sqrt{3}$, si ha $OF = 8 + 8\sqrt{3}$ e l'area richiesta vale $\left(\frac{1}{2}\right)(8+8\sqrt{3})^2 - 8^2 - \left(\frac{1}{2}\right)16 \cdot 8\sqrt{3} = 8^2\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3} + \frac{3}{2} - 1 - \sqrt{3}\right) =$
$= 64$.

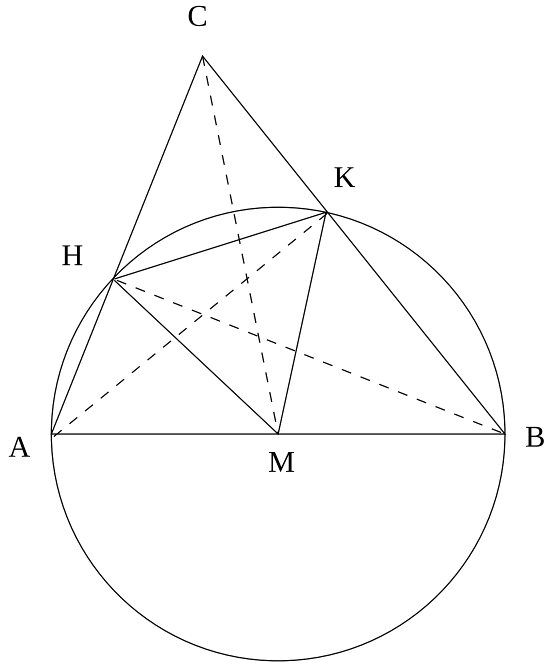


14. La risposta è 14. Infatti il punteggio medio di un lancio è uguale a 3,5. Inoltre la probabilità di fare un punteggio che supera di un certo valore x la media è uguale alla probabilità di realizzare un punteggio che sta sotto alla media dello stesso x. Dopo 14 lanci la media della somma dei punteggi forniti dal dado sarà $3{,}5 \cdot 14 = 49$, per cui si ha più del 50% di probabilità che questo valore sia maggiore od uguale a 48. Infine 14 lanci è il minimo, poiché dopo soli 13 lanci la media risulta essere $3{,}5 \cdot 13 = 46{,}5$ e di conseguenza la probabilità di ottenere un valore maggiore od uguale a 48 sarà minore del 50%.

15. La risposta è 5. La somma algebrica dei coefficienti di un polinomio è uguale al valore che il polinomio assume per $x = 1$, quindi

$$2^{2001} - 8^{667} + 5 = 2^{2001} - 2^{3 \cdot 667} + 5 = 5 \,.$$

16. La circonferenza passante per A, H e B ha centro in M, poiché il triangolo ABH è rettangolo. Stesso ragionamento per AKB. Quindi A, H, K e B stanno tutti su una stessa circonferenza di diametro AB e centro M (il punto medio), da cui $MH = MK$ perché sono raggi. Il triangolo rettangolo CHB ha l'angolo in C di $60°$, quindi $\widehat{KBH} = 30°$. L'angolo $\widehat{HMK}$ è l'angolo al centro che insiste sullo stesso arco di $\widehat{KBH}$, quindi $\widehat{HMK} = 60°$, da cui segue che HKM è equilatero.



17. Prima Soluzione: Si ha $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, per cui $a^3 + b^3 = 91$ implica $a + b = h$, $a^2 - ab + b^2 = k$, dove h e k sono interi relativi tali che $hk = 91$. Poiché, per ogni coppia di interi relativi a, b, $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$, l'unica possibilità è che $h > 0$ e $k > 0$, e quindi $h = 1, 7, 13, 91$. D'altra parte, se a e b sono interi tali che $h = 1, 7, 13, 91$ e, rispettivamente, $k = 91, 13, 7, 1$, allora $a^3 + b^3 = 91$.

Osserviamo inoltre che $k = a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$.

Si ha $h = 1$ e $k = 91$, se e solo se $a + b = 1$, $ab = -30$, e quindi se e solo se $a = 6$, $b = -5$ o viceversa.

Si ha $h = 7$ e $k = 13$ se e solo se $a + b = 7$, $ab = 12$, e quindi se e solo se $a = 3$, $b = 4$ o viceversa.

Si ha $h = 13$ e $k = 7$ se e solo se $a + b = 13$, $ab = 54$, che non ha soluzioni intere.

si ha $h = 91$ e $k = 1$ se e solo se $a + b = 91$ e $ab = 2760$, che non ha soluzioni intere.

Pertanto le uniche soluzioni sono:

$$(a, b) = (6, -5),\ (-5, 6),\ (3, 4),\ (4, 3).$$

Seconda soluzione: Poiché un numero intero e il suo cubo hanno lo stesso segno, almeno uno fra a e b deve essere non negativo.

Primo caso: $a \geq 0$, $b \geq 0$. Abbiamo $a^3 \leq 91$, quindi $a = 0, 1, 2, 3, 4$. Sostituendo questi valori di a, si trova che $b^3 = 91 - a^3$ ha soluzione se e solo se $a = 3$ o $a = 4$, le soluzioni essendo rispettivamente $b = 4$ e $b = 3$.

Secondo caso: $a \geq 0, b < 0$, *o viceversa.* Esaminiamo, per simmetria, solo il caso in cui $a \geq 0$ e $b < 0$. Ponendo $c = -b$, si ha $c > 0$ e $a^3 = 91 + c^3$, da cui $a \geq c + 1$. Ne segue che $(c+1)^3 \leq 91 + c^3$, ossia $c^2 + c - 30 \leq 0$, e quindi $c \leq 5$. Sostituendo i valori $c = 1, 2, 3, 4, 5$, si verifica che $a^3 = 91 + c^3$ ha soluzione solo se $c = 5$, e in questo caso si ottiene $a = 6$, $b = -5$. Considerando la simmetria, si ottiene anche la soluzione $a = -5$, $b = 6$.

Pertanto le uniche soluzioni sono:

$$(a, b) = (6, -5),\ (-5, 6),\ (3, 4),\ (4, 3).$$