UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2003

GARA di SECONDO LIVELLO BIENNIO

19 febbraio 2003

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 15 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) L'ultimo problema richiede invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tale problema verrà valutato con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **2 ore e 45 minuti** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________ COGNOME:____________________

Indirizzo:____________________ Città:____________________

SCUOLA:____________________ CLASSE:______ Città:____________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–14)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
PUNTEGGIO TOTALE			

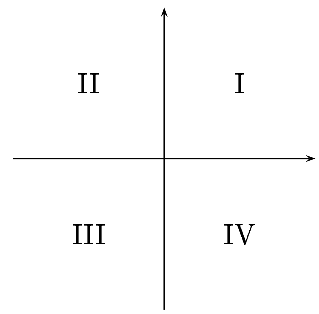
Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

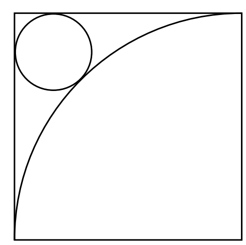
1. Dati due numeri x e y con $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?
(A) $x + y < 1$ **(B)** $\frac{x}{y} < 1$ **(C)** $x + y > 1$ **(D)** $x^2 + y^2 > 1$ **(E)** $x < \frac{1}{y}$.

2. Nel paese di Oz, oltre alle persone normali (che possono mentire oppure dire la verità), vivono cavalieri (che dicono sempre la verità) e furfanti (che mentono sempre). Una strana legge impone che in ogni matrimonio i coniugi siano o entrambi normali, oppure uno cavaliere e l'altro furfante. Arrivati alla villetta bifamiliare dei coniugi Allegri e Bianchi, chiedete se il sig. Bianchi, che è assente, è un cavaliere, ottenendo risposta affermativa sia dalla sig.ra Bianchi che da entrambi i coniugi Allegri. Che cosa potete concludere riguardo al signor Bianchi?
(A) Il sig. Bianchi è un cavaliere
(B) il sig. Bianchi è un furfante
(C) il sig. Bianchi è normale
(D) è impossibile che le risposte date siano quelle riportate
(E) non potete concludere nulla.

3. Tre circonferenze passano per l'origine. Il centro della prima circonferenza sta nel primo quadrante, il centro della seconda sta nel secondo quadrante, il centro della terza sta nel terzo quadrante. Se P è un punto interno alle tre circonferenze, allora
(A) P sta nel secondo quadrante
(B) P sta nel primo o nel terzo quadrante
(C) P sta nel quarto quadrante
(D) non può esistere un punto P siffatto
(E) non si può dire nulla.

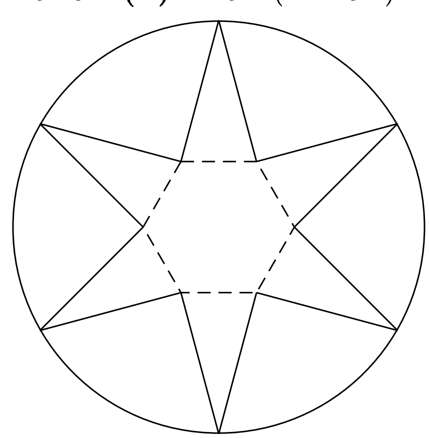


4. Quanto misura il raggio della circonferenza piccola nella figura a fianco, se il lato del quadrato è lungo 1?
(A) $3 - 2\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **(E)** $4 - 3\sqrt{2}$.

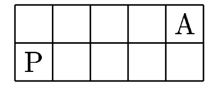


5. In Italia le targhe automobilistiche sono composte da 2 lettere, seguite da 3 cifre e da altre 2 lettere. Nel paese di Ailati le cose vanno alla rovescia e le targhe sono composte da 2 cifre, seguite da 3 lettere e da altre 2 cifre. Supponendo che in entrambi i paesi si usino 10 cifre e 22 lettere (I, O, U, Q non sono utilizzate), determinare la differenza tra il numero di tutte le targhe possibili nei due paesi.
(A) 0 **(B)** $12 \cdot 10^3 \cdot 22^3$ **(C)** $(22^2 - 10^2)^2 - (22^3 - 10^3)$ **(D)** $12 \cdot 3 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 10$ **(E)** $4^{10} \cdot 3^{10} \cdot (4^{12} - 3^{12})$.

6. Una stella a 6 punte viene disegnata costruendo sui lati di un esagono regolare sei triangoli isosceli con angolo al vertice di 30 gradi. Sapendo che la circonferenza che passa per le punte della stella ha raggio 1, calcolare l'area della stella stessa.
(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ **(C)** $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$ **(D)** $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{2}$
(E) nessuna delle precedenti.



7. Per quante coppie (p, q) di numeri primi (positivi) il polinomio $x^2 + px + q$ ha due radici intere?
NOTA: Si ricorda che 1 non è un numero primo.
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** infinite.

8. Nella griglia in figura si vuole andare dalla casella di partenza P alla casella di arrivo A, seguendo due regole: ci si può spostare da una casella ad un'altra solo se hanno un lato in comune; si può passare al più una volta da ogni casella. In quanti modi può essere fatto il tragitto?


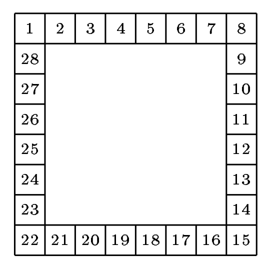
(A) 5 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 16 **(E)** 32.

9. Quanti sono i numeri di due cifre AB tali che $(AB)^2 = CAAB$, con $C = B - 1$ (in notazione decimale)?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 9.

10. Un gioco è costituito da 10 lanci di un normale dado cubico con le facce numerate da 1 a 6. Alla fine si sommano i punteggi ottenuti, con la regola che se si ottiene 6 in un lancio i punti del lancio successivo vengono contati raddoppiati e che se si fa 6 all'ultimo lancio si ha diritto ad un (solo) tiro supplementare di cui sommare il punteggio (non raddoppiato). Quale di questi punteggi finali non si può ottenere?
(A) 64 **(B)** 78 **(C)** 92 **(D)** 114 **(E)** 120.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. Prendiamo un intero positivo n, facciamo la somma delle sue cifre e poi addizioniamo nuovamente le cifre di tale somma ottenendo un intero S. Qual è il più piccolo n che permette di ottenere $S \geq 10$?

12. Numeriamo da 1 a 28 le caselle disposte sul bordo di una comune scacchiera 8×8 (vedere figura a lato). All'inizio un dado cubico viene posto sulla casella 1 in modo che la sua faccia inferiore si sovrapponga esattamente all'intera casella. Muoviamo il dado lungo le caselle come segue: la prima mossa consiste nel ruotare di 90° il dado attorno al lato comune tra la casella 1 e la casella 2 in modo che al termine il dado si trovi esattamente sopra la casella 2. In modo analogo facciamo passare il dado dalla casella 2 alla 3, dalla 3 alla 4 e così via, ruotando di volta in volta il dado attorno al lato comune tra la casella su cui è appoggiato e la successiva. Dalla casella 28 si torna alla casella 1 e, terminato un giro, si ricomincia da capo. Quante mosse occorrono al minimo perché il dado torni sulla casella 1 con la stessa faccia superiore che aveva all'inizio?


13. Un'azienda dolciaria produce due tipi di torrone, usando la stessa pasta bianca e le stesse nocciole, ma in proporzioni diverse. Nel torrone di tipo A le nocciole rappresentano il 30% del peso ed il 40% del volume; in quello di tipo B le nocciole rappresentano il 60% del peso. Quale percentuale del volume rappresentano le nocciole nel torrone di tipo B?

14. Un dodecaedro è un solido regolare con 12 facce pentagonali. Una diagonale di un solido è un segmento che ha per estremi due vertici del solido che non appartengono ad una stessa faccia. Quante sono le diagonali del dodecaedro?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

(i) Si determinino tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione $n^2 - 2^m = 1$.

(ii) Si determinino tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione $2^m - n^2 = 1$.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2003

GARA di SECONDO LIVELLO BIENNIO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

La prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE

Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E	C	A	A	B	B	B	D	B	D	199	84	70	100

SECONDA PARTE

Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, l'ultimo problema richiede una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questo esercizio, diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. L'esercizio sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quella da noi proposta.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

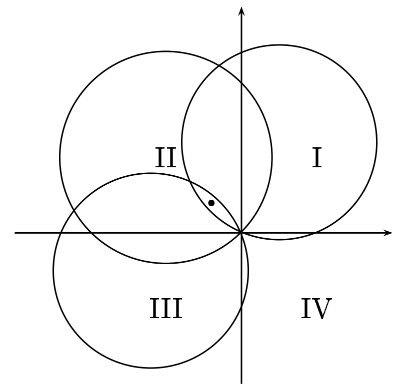
Nelle linee della dimostrazione proposta, attribuire:

1. la mera indicazione delle soluzioni 1 e/o 3 vale 1 punto per ciascuna;
2. l'osservazione (giustificata) che n deve essere dispari vale 2 punti;
3. un altro punto si aggiunge per la corretta sostituzione $n = 2a \pm 1$;
4. la soluzione completa di una qualunque delle due equazioni vale 6 punti;
5. la trattazione corretta di uno qualunque dei due casi, senza l'esplicita menzione che l'unico caso ammissibile è effettivamente una soluzione vale 5 punti.

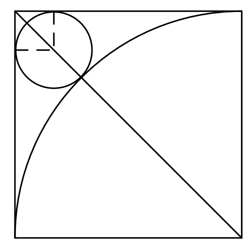
1. La risposta è **(E)**. Tale affermazione è sempre vera, poiché $x < 1$, mentre $\frac{1}{y} > 1$. Per $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ le ipotesi del testo sono verificate, ma **(B)** , **(C)** e **(D)** sono false. Infine $x = y = \frac{3}{4}$ fornisce un controesempio per **(A)**.

2. La risposta è **(C)**, come si può vedere per esclusione. Se il signor Bianchi non fosse normale, sarebbe un furfante o un cavaliere. Nel primo caso, la moglie sarebbe un cavaliere e avrebbe mentito affermando che il marito è un cavaliere, questo è assurdo. Nel secondo caso (signor Bianchi cavaliere) la moglie sarebbe un furfante e avrebbe detto la verità, e questo è ancora un assurdo.

3. La risposta è **(A)**. Osserviamo che se una circonferenza passa per l'origine ed ha il centro in un quadrante, allora nessun punto interno sta nel quadrante opposto. In particolare se P è interno alle tre circonferenze, allora deve trovarsi nel secondo quadrante, poiché i tre centri si trovano nel primo, secondo e terzo quadrante. Effettivamente può esistere un punto siffatto, come mostra il disegno a fianco.

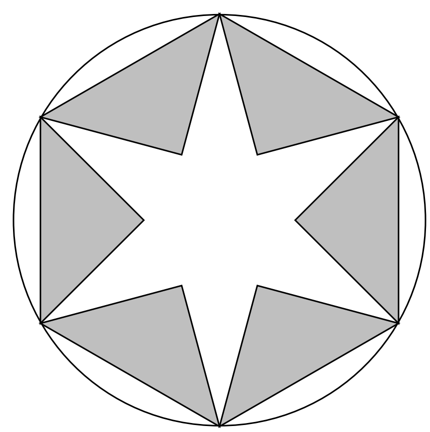


4. La risposta è **(A)**. Con riferimento alla figura a fianco, detto r il raggio richiesto, si ha $1 + r + r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, da cui $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ e infine, razionalizzando, $r = 3 - 2\sqrt{2}$.



5. La risposta è **(B)**. Ogni lettera può essere scelta in 22 modi, ogni cifra in 10 modi, e ogni scelta di una lettera o di una cifra può essere combinata con qualsiasi altra scelta di cifre e di lettere in altre posizioni. Pertanto le targhe italiane sono $10^3 \cdot 22^4$ e quelle di Ailati $10^4 \cdot 22^3$; la differenza risulta $10^3 \cdot 22^3 \cdot (22 - 10) = 12 \cdot 10^3 \cdot 22^3$.

6. La risposta è **(B)**. I sei triangoli isosceli hanno due angoli di $75°$. L'angolo compreso fra due lati di due triangoli isosceli aventi un vertice in comune è quindi $360° - (75° + 75° + 120°) = 90°$. Con riferimento alla figura a fianco, si osserva che l'area S richiesta può essere ottenuta sottraendo dall'area dell'esagono regolare (che ha lato pari al raggio della circonferenza circoscritta) l'area di 6 triangoli rettangoli isosceli di lato $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Si ha quindi $S = \dfrac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - 6 \cdot \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$ da cui $S = \dfrac{6\sqrt{3}}{4} - \dfrac{6}{4} = \dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$



7. La risposta è **(B)**. Infatti siano a e b le due radici intere del polinomio. Si ha quindi che $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = x^2 + px + q$ da cui:

$$a + b = -p \ , \qquad ab = q.$$

Poiché q è un primo, dalla seconda relazione si ricava che $a, b = \pm 1$ o $a, b = \pm q$. Dovendo essere $a+b$ negativo si ha che $a = -1$ e $b = -q$ (o viceversa). Quindi si ricava che $-1 - q = -p \Rightarrow 1 + q = p$, ovvero che p è il successivo di q. Essendo gli unici due primi consecutivi 2 e 3 se ne ricava $p = 3$ e $q = 2$ e quindi esiste un'unica soluzione.

SECONDA SOLUZIONE

Siano a, b le due eventuali radici intere. Allora si ha $x^2+px+q=(x-a)(x-b)$, da cui $a+b=-p$ e $ab=q$. Dato che q è primo, dalla seconda condizione otteniamo $a=\pm 1,\ \pm q$ e corrispondentemente $b=\pm q,\ \pm 1$. Scambiando eventualmente a e b, possiamo supporre che sia $a=\pm 1$, $b=\pm q$. La prima condizione impone che b sia negativo, quindi $a=-1$, $b=-q$ e $p-q=1$. I soli primi che differiscono di 1 sono 2 e 3. Pertanto si ha solo la coppia $(3,2)$, corrispondente a $a=-1$, $b=-3$.

8. La risposta è **(D)**. Il tragitto può essere compiuto in 16 modi. Osserviamo innanzitutto che per andare da P ad A secondo le regole ad ogni passo ci si può spostare solo a destra o in verticale. Questo perché spostandosi a sinistra si è costretti a ripassare su di una casella già percorsa. In totale si faranno 4 spostamenti verso destra, eventualmente intervallati con spostamenti in verticale. Arrivati per la prima volta in ognuna delle prime quattro colonne si può scegliere se spostarsi a destra o effettuare prima uno spostamento in verticale, mentre arrivati nell'ultima colonna il percorso è obbligato. Perciò il numero di percorsi possibili è $2^4=16$.

9. La risposta è **(B)**. Innanzitutto sappiamo che il numero AB e il suo quadrato hanno entrambi la stessa cifra finale B. Quindi B deve assumere uno dei quattro valori $0,1,5,6$. I casi 0 e 1 li escludiamo visto che $C=B-1$ è una cifra positiva. Negli altri casi la relazione $(AB)^2=CAAB$ diventa:
1) $(A5)^2=(10A+5)^2=100A^2+100A+25=4AA5=4005+110A$ da cui $10A^2-A-398=0$ che non ha soluzione per $A=1,2,\ldots,9$.
2) $(A6)^2=(10A+6)^2=100A^2+120A+36=5AA6=5006+110A$ da cui $10A^2+A-497=0$ che ha come soluzioni intere soltanto $A=7$.
Quindi l'unica soluzione per AB è $AB=76$.

SECONDA SOLUZIONE

Si deve avere $(10A+B)^2=100A^2+20AB+B^2=1000(B-1)+100A+10A+B$. Dunque la cifra finale del quadrato di B deve essere B, quindi $B=0,1,5,6$. Ora B deve essere maggiore di 1, perché altrimenti $B-1$ non può essere la cifra iniziale di $(AB)^2$, quindi $B=5,6$. Ora se $B=5$ A deve essere 6, perché $(AB)^2$ deve stare tra 4000 e 5000; ma $65^2=4225$ non soddisfa la condizione richiesta. Se invece $B=6$ A deve essere 7, perché $(AB)^2$ deve stare tra 5000 e 6000; e $76^2=5776$ soddisfa la condizione richiesta.

10. La risposta è **(D)**. Infatti, supponiamo per assurdo che 114 sia un punteggio ammissibile. Indichiamo con N il numero dei lanci con cui è stato ottenuto, N può essere 10 o 11. Il primo punteggio fatto è minore o uguale a sei, dunque si è fatto almeno $114-6=108$ con $N-1$ lanci; notiamo che $108=12\times 9$, quindi se fosse $N=10$, l'unica sequenza possibile dei punteggi sarebbe data da un 6 e nove 12 consecutivi, ma allora l'ultimo lancio avrebbe dato 6 e ci sarebbe stato anche l'undicesimo tiro.
Dunque $N=11$. Segue che si è ottenuto almeno 108 con 10 lanci (quelli dal secondo all'undicesimo). Notiamo che l'undicesimo lancio dà un punteggio minore o uguale a sei, quindi si deve essere ottenuto almeno 102 con 9 lanci. Supponiamo che i punteggi di questi lanci non siano tutti 12. Allora c'è un punteggio minore o uguale a 10 (11 non può essere ottenuto). Supponiamo che questo sia avvenuto al decimo lancio, che conseguentemente deve essere un 6. Questo è impossibile perchè si sarebbe ottenuto almeno $96=8\times 12$ con 8 lanci (dal secondo al nono), che dovrebbero dare tutti 12, ma allora il decimo darebbe 12 e non 6. Allora il punteggio minore o uguale a 10 viene ottenuto prima del decimo lancio e al lancio successivo il punteggio è minore o uguale a 6; sottraendo questi due punteggi, segue che si è ottenuto con soli sette lanci almeno $102-16=86$ e questo è impossibile.
In conclusione l'unica sequenza ammissibile è quella data da un 6 iniziale, nove 12 consecutivi più il punteggio p dell'undicesimo tiro, e il punteggio complessivo è $114+p$ che non può coincidere con 114 perchè p è compreso tra 1 e 6. Abbiamo ottenuto un assurdo.

11. La risposta è 199. Infatti se n avesse 1 o 2 cifre, $n \leq 99$, e allora la somma delle sue cifre sarebbe ≤ 18 e la somma delle cifre del numero pari alla somma delle sue cifre sarebbe ≤ 9, dunque n ha almeno tre cifre. Osserviamo che per $n \leq 198$, ancora la somma delle cifre del numero è ≤ 18. Invece se $n = 199$, la somma delle sue cifre è 19 e la somma delle cifre di 19 è 10, come richiesto.

12. La risposta è 84. Consideriamo l'orientamento del cubo quando questo si trova agli angoli della scacchiera: chiamiamo A, B, C, D i 4 angoli, nell'ordine in cui il cubo li attraversa. Se il cubo ad un certo punto occupa l'angolo A con la faccia F rivolta verso l'alto, negli angoli B e C F è rivolta lateralmente, mentre in D F è nuovamente la faccia superiore. Quindi il cubo si ritrova ad avere la stessa faccia superiore ogni 3 angoli, vale a dire ogni 21 mosse. Poiché un percorso completo consiste di 28 mosse, il minimo numero di mosse necessarie perché il cubo ritorni nello stesso angolo con la stessa faccia superiore è $mcm(21, 28) = 84$.

13. La risposta è 70. Sia P_A il peso del torrone A, V_A il volume del torrone A, P_B il peso del torrone B, V_B il volume del torrone B. Si ha che $30\% P_A$ occupa $40\% V_A$, quindi il peso specifico delle nocciole è $\frac{3}{4}\frac{P_A}{V_A}$. Considerando il peso e lo spazio occupato dalla pasta bianca nel torrone A si ricava invece che il suo peso specifico è $\frac{7}{6}\frac{P_A}{V_A}$. Quindi per calcolare il volume occupato dalle nocciole e dalla pasta bianca nel torrone B dividiamo il loro peso, ovvero $60\% P_B$ le nocciole e $40\% P_B$ la pasta bianca, per il loro peso specifico, ottenendo che le prime occupano $\frac{4}{5}\frac{P_B}{P_A}V_A$ e le seconde $\frac{12}{35}\frac{P_B}{P_A}V_A$. Sommando i due volumi otteniamo il volume totale, ovvero $V_B = \frac{4}{5}\frac{P_B}{P_A}V_A + \frac{12}{35}\frac{P_B}{P_A}V_A = \frac{8}{7}\frac{P_B}{P_A}V_A$. Per calcolare la percentuale occupata dalle nocciole non ci rimane che dividere il volume da esse occupato per il volume totale del torrone:

$$\frac{\frac{4}{5}\frac{P_B}{P_A}V_A}{\frac{8}{7}\frac{P_B}{P_A}V_A} = 70\%$$

Quindi le nocciole occupano il 70% del volume del torrone B.

SECONDA SOLUZIONE

Nel primo torrone col 30% del peso le nocciole facevano il 40% del volume, e quindi la pasta col 70% del peso faceva il 60% del volume. Dunque se la "voluminosità delle nocciole è 4/3 quella della pasta risulta 6/7. Dunque la quota di volume delle nocciole nel secondo torrone è

$$\frac{60 \cdot 4/3}{60 \cdot 4/3 + 40 \cdot 6/7} = \frac{80}{80 + 240/7} = \frac{560}{800} = 70\%.$$

14. La risposta è 100. È necessario contare le coppie (non ordinate) di vertici non appartenenti ad una stessa faccia. In ogni vertice si incontrano 3 facce e in ciascuna di esse ci sono 2 vertici che non sono su una faccia che contiene anche il vertice iniziale (totale 6) più 2 in comune con un'altra faccia (che sono contati due volte e sono quindi in realtà in totale 3) più il vertice stesso: quindi dobbiamo escludere dal conto 10 vertici che non danno luogo a diagonali. Ma i vertici del dodecaedro sono $12 \cdot 5/3 = 20$ (12 facce pentagonali, ma che si incontrano a 3 a 3), quindi per ognuno di questi dobbiamo considerare $20 - 10 = 10$ vertici possibili come altro estremo di una diagonale. In totale le diagonali sono $20 \cdot 10/2 = 100$, dove si è diviso per 2 poiché, moltiplicando, ogni diagonale viene contata due volte.

15. Anzitutto n deve essere dispari in entrambi i casi, perché 2^m è pari per $m \geq 1$.

   (i) $n = m = 3$. Infatti tra due numeri pari consecutivi uno non è divisibile per quattro, mentre da $2^m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ si ottiene che $n - 1$ e $n + 1$ sono entrambi potenze di 2; rimane quindi solo la possibilità che sia $n - 1 = 2$, da cui $n = 3$ e quindi $m = 3$.
   Alternativamente si osservi che, posto $n = 2a + 1$, si ha $n^2 - 1 = 4a^2 + 4a = 4a(a+1)$, che è possibile solo per $a = 1$, altrimenti 2^m avrebbe un fattore dispari maggiore di 1.

   (ii) $n = m = 1$. Posto $n = 2a + 1$ si ottiene $2^m = 4a^2 + 4a + 2$, che dà resto 2 se diviso per quattro. Dunque m deve essere uno, altrimenti 2^m sarebbe divisibile per 4, e a deve essere quindi 0. D'altra parte si vede subito che $n = m = 1$ è soluzione $(2^1 - 1 = 1)$.

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2003

GARA di SECONDO LIVELLO TRIENNIO

19 febbraio 2003

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) Gli ultimi due problemi richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di questi problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:________________ COGNOME:________________

Indirizzo:________________ Città:________________

SCUOLA:________________ CLASSE:________ Città:________________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–15)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

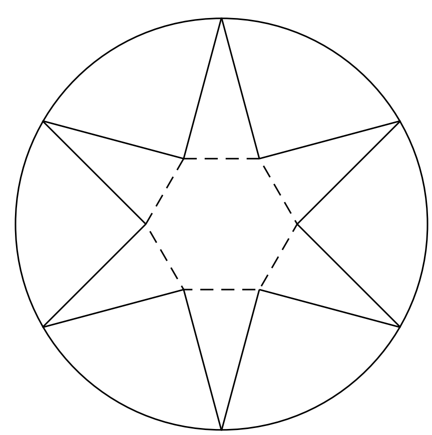
1. Nel paese di Oz, oltre alle persone normali (che possono mentire oppure dire la verità), vivono cavalieri (che dicono sempre la verità) e furfanti (che mentono sempre). Una strana legge impone che in ogni matrimonio i coniugi siano o entrambi normali, oppure uno cavaliere e l'altro furfante. Arrivati alla villetta bifamiliare dei coniugi Allegri e Bianchi, chiedete se il sig. Bianchi, che è assente, è un cavaliere, ottenendo risposta affermativa sia dalla sig.ra Bianchi che da entrambi i coniugi Allegri. Di quanti coniugi potete determinare il tipo?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

2. In Italia le targhe automobilistiche sono composte da 2 lettere, seguite da 3 cifre ed altre 2 lettere. Nel paese di Ailati le cose vanno alla rovescia e le targhe sono composte da 2 cifre, seguite da 3 lettere ed altre 2 cifre. Supponendo che in entrambi i paesi si usino 10 cifre e 22 lettere (I, O, U, Q non sono utilizzate), determinare la differenza tra il numero di tutte le targhe possibili nei due paesi.
(A) 0 **(B)** $12 \cdot 10^3 \cdot 22^3$ **(C)** $(22^2 - 10^2)^2 - (22^3 - 10^3)$ **(D)** $12 \cdot 3 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 10$
(E) nessuna delle precedenti.

3. Sono dati tre interi positivi a, b, c. Posto $x = ab$, $y = ac$, $z = bc$, quale delle seguenti affermazioni è vera?
(A) Se x, y, z sono dei quadrati, allora a, b, c sono dei quadrati
(B) se x, y, z sono pari, allora a, b, c sono pari
(C) se x, y, z sono dei cubi, allora a, b, c sono dei cubi
(D) se x, y, z sono multipli di 10, allora a, b, c sono multipli di 10
(E) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

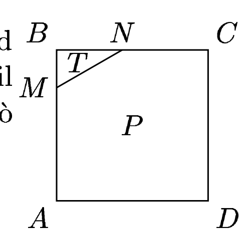
4. Un tastierino numerico quadrato di lato 4 ha i tasti numerati da 1 a 16. L'agente 007 deve premere due tasti contemporaneamente per penetrare nella base nemica, e se sbaglia farà suonare l'allarme. Tuttavia sa soltanto che i due tasti non sono contigui (cioè non hanno un lato o un vertice in comune). Qual è la probabilità che riesca ad infiltrarsi?
(A) $\frac{1}{64}$ **(B)** $\frac{1}{78}$ **(C)** $\frac{1}{128}$ **(D)** $\frac{1}{156}$ **(E)** $\frac{1}{160}$.

5. Un punto interno ad un triangolo equilatero dista 5, 7, 8 dai tre lati. Quanto vale il lato del triangolo?
(A) I dati non sono sufficienti
(B) la configurazione data non può esistere
(C) il lato vale 20
(D) il lato vale $14\sqrt{3}$
(E) il lato vale $\frac{40}{3}\sqrt{3}$.



6. Una stella a 6 punte viene disegnata costruendo sui lati di un esagono regolare sei triangoli isosceli con angolo al vertice di 30 gradi. Sapendo che la circonferenza che passa per le punte della stella ha raggio 1, calcolare l'area della stella stessa.
(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ **(C)** $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$ **(D)** $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{2}$
(E) nessuna delle precedenti.

7. In un quadrato $ABCD$ di lato 2, un segmento MN di lunghezza 1 è vincolato ad avere l'estremo M sul lato AB e l'estremo N sul lato BC. Tale segmento divide il quadrato in un triangolo T e un pentagono P. Qual è il valore massimo che può assumere il rapporto tra l'area di T e quella di P?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{1}{7}$ **(D)** $\frac{2}{15}$ **(E)** $\frac{1}{15}$.



8. Sia $\mathcal{R}$ la regione finita del piano che è delimitata dall'asse x e dal grafico della curva di equazione $2x^2 + 5y = 10$. Dati tre punti di $\mathcal{R}$, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?
(A) almeno due dei tre punti hanno distanza $\geq \frac{\sqrt{5}}{2}$
(B) almeno due dei tre punti hanno distanza ≤ 3
(C) la somma delle distanze fra i punti è $\leq \frac{9}{2}\sqrt{5}$
(D) la somma dei quadrati delle distanze fra i punti è ≤ 38
(E) il prodotto delle distanze tra i punti è $\leq 16\sqrt{5}$.

9. In un parallelepipedo rettangolo P la lunghezza della diagonale è $\sqrt{133}$ e la superficie totale è 228. Sapendo che uno dei lati è medio proporzionale tra gli altri due, il volume di P è
(A) 64 **(B)** 125 **(C)** 192 **(D)** 216 **(E)** 343.

10. Da un punto S esterno ad una circonferenza γ di raggio 1 si tracci una retta tangente a γ e si indichi con T il punto di tangenza. Al variare di un punto P su γ, il baricentro del triangolo PST descrive una curva γ'. Qual è il rapporto tra la lunghezza di γ' e quella di γ?
(A) $\dfrac{1}{\pi}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{4}{3}\pi$ **(E)** dipende dalla posizione di S.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. Per ogni intero n, sia $S(n)$ la somma delle cifre di n (in base decimale). Qual è il più piccolo intero N per cui $S(S(N)) \geq 10$?

12. Determinare il numero di quadruple di numeri interi (non necessariamente distinti) compresi fra 1 e 12 (estremi inclusi) che verificano tutte le seguenti condizioni:
- la somma dei primi due numeri è pari
- la somma dei primi tre numeri è multipla di 3
- la somma dei quattro numeri è multipla di 4.

(Due quadruple che differiscano anche solo per l'ordine degli addendi sono da considerarsi distinte).

13. Un dodecaedro è un solido regolare con 12 facce pentagonali. Una diagonale di un solido è un segmento che ha per estremi due vertici del solido che non appartengono ad una stessa faccia. Quante sono le diagonali del dodecaedro?

14. Il piccolo Marco sale e scende da un piano all'altro la scala mobile di un centro commerciale, uno scalino alla volta. Se procede nel senso di marcia della scala a velocità costante rispetto ad essa (cioè l'intervallo di tempo fra un passo e l'altro è costante), calpesta 15 gradini, se procede in senso contrario (con lo stesso intervallo di tempo fra un passo e l'altro) ne calpesta 35. Quanti scalini calpesterebbe Marco nel passare da un piano all'altro se la scala mobile fosse ferma?

15. Si vogliono regalare sette pacchi dono a sette bambini, uno a ciascuno. Si vuol fare in modo che in ciascun pacco ci siano tre giochi diversi e che, comunque si scelgano due bambini, essi ricevano al più un gioco in comune. Qual è il minimo numero di tipi di giochi distinti che è necessario usare?

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $x_0, x_1, x_2, \ldots$ la successione definita da $x_0 = 2$ e $x_{n+1} = 5 + (x_n)^2$ per ogni $n \geq 0$. Dimostrare che in tale successione non compaiono numeri primi diversi da 2.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Si dimostri che se in un triangolo vi sono due altezze di egual lunghezza, allora il triangolo è isoscele.

b) Si dimostri che se in un triangolo vi sono due mediane di egual lunghezza, allora il triangolo è isoscele.

c) Sui lati AB e AC di un triangolo ABC si scelgano due punti M, N in modo tale che $AM : AB = AN : AC$ e si supponga che $BN = CM$; si dimostri che il triangolo ABC è isoscele.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2003

GARA di SECONDO LIVELLO TRIENNIO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	B	C	B	E	B	E	B	D	C	199	864	100	21	7

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16 si assegnino:

(a1) – 3 punti a chi osserva che i termini sono alternativamente pari e dispari e ne conclude che solo i termini dispari possono dare primi diversi da 2;

(a2) – 2 punti per la sola osservazione che i termini sono alternativamente pari e dispari;

(b1) – fino ad un massimo di 7 punti a chi nota che i termini dispari sono tutti multipli di 3, secondo la completezza e la correttezza della dimostrazione;

(b2) – 2 punti per la sola osservazione che i primi tre o quattro termini dispari sono multipli di 3, ma senza dimostrazione del caso generale;

(c1) – 2 punti a chi dimostra che nemmeno 3 compare nella successione (utilizzando la crescenza o qualsiasi altro valido argomento);

(c2) – 1 punto a chi nota che uno o più primi particolari (per esempio 5) non compare nella successione.

I punti di (a1) e (a2) non sono cumulabili, così come non sono cumulabili i punti di (b1) e (b2) e i punti di (c1) e (c2).

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 17 si assegnino:

- 2 punti per la soluzione del punto a), di cui 1 per il solo fatto di aver detto che dipende dall'area del triangolo;
- 4 punti per qualunque soluzione corretta del punto b), di cui 2 per aver costruito il baricentro e citato il teorema sulle mediane, 1 supplementare per aver dimostrato che il triangolo chiamato nella soluzione BCO è isoscele; 1 punto se non è stata data dimostrazione corretta di b) né di c), ma è stato detto che b) è un caso particolare di c) (mentre 4 punti se ciò è stato detto ed è stata data una dimostrazione corretta di c), perché questa è una dimostrazione corretta di b));
- 6 punti per qualunque soluzione corretta di c), di cui 1 solo per aver citato il teorema di Talete, 1 in più per averlo usato correttamente ed aver quindi dimostrato che BC e MN sono paralleli, 1 in più per aver dimostrato che BOC e MON sono simili, 2 in più (in totale quindi 5) per aver dimostrato che BOC e/o MON sono isosceli.

1. La risposta è **(E)**. Se il signor Bianchi non fosse normale, sarebbe un furfante o un cavaliere. Nel primo caso, la moglie sarebbe un cavaliere e avrebbe mentito affermando che il marito è un cavaliere, questo è assurdo. Nel secondo caso (signor Bianchi cavaliere) la moglie sarebbe un furfante e avrebbe detto la verità, e questo è ancora un assurdo. Quindi il signor Bianchi è normale e anche sua moglie lo è. Occorre considerare poi anche la coppia dei signori Allegri. Questi, poiché affermano la medesima cosa, non possono essere che normali. In conclusione tutte le persone sono normali.

2. La risposta è **(B)**. Ogni lettera può essere scelta in 22 modi, ogni cifra in 10 modi, e ogni scelta di una lettera o di una cifra può essere combinata con qualsiasi altra scelta di cifre e di lettere in altre posizioni. Pertanto le targhe italiane sono $10^3 \cdot 22^4$ e quelle di Ailati $10^4 \cdot 22^3$; la differenza risulta $10^3 \cdot 22^3 \cdot (22 - 10) = 12 \cdot 10^3 \cdot 22^3$.

3. La risposta è **(C)**. Dato un primo p indichiamo con x_p, y_p e z_p l'esponente (eventualmente nullo) con cui p compare nella fattorizzazione rispettivamente di x di y e di z; in modo analogo fissiamo a_p, b_p e c_p. L'ipotesi di **(C)** è equivalente a dire che x_p, y_p, z_p sono multipli di 3 per ogni primo p. Sappiamo quindi che 3 divide i numeri $(a_p + b_p)$, $(a_p + c_p)$ e $(b_p + c_p)$ e pertanto 3 divide anche:

$$(a_p + b_p) + (a_p + b_p) - (b_p + c_p) = 2a_p;$$

quindi a_p è divisibile per 3. In modo del tutto analogo si verifica che anche b_p e c_p sono divisibili per 3, questo vale per ogni p e quindi a, b, c sono dei cubi.
Si danno qui di seguito controesempi per le altre risposte:
(A) $a = b = c = 2$;
(B) $a = b = 2$, $c = 1$;
(D) $a = b = 10$, $c = 1$.

4. La risposta è **(B)**. La probabilità richiesta è l'inverso del numero delle possibili paia di tasti non contigui. Per contare tali paia distinguiamo vari casi:

   (a) uno dei tasti è tra i quattro centrali: allora l'altro deve essere sul bordo, e vanno esclusi 5 tasti contigui. Possibilità: $4 \cdot 7 = 28$

   (b) uno dei tasti è in un vertice e l'altro no (ma non nei quattro centrali): sono esclusi solo due tasti del bordo contigui al vertice. Possibilità $4 \cdot 6 = 24$

   (c) tutti e due i tasti sono nei vertici: ci sono tante possibilità quante le paia di vertici.

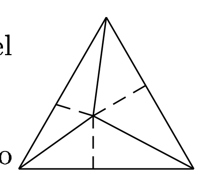
   Possibilità $4 \cdot 3/2 = 6$

   (d) tutti e due i tasti sono sul bordo ma non nei vertici: ci sono 8 tasti e ogni tasto ne esclude esattamente due contigui, lasciandone 5 validi (ma ogni paio viene contato due volte).

   Possibilità $8 \cdot 5/2 = 20$

   Dunque le possibilità totali sono 78.

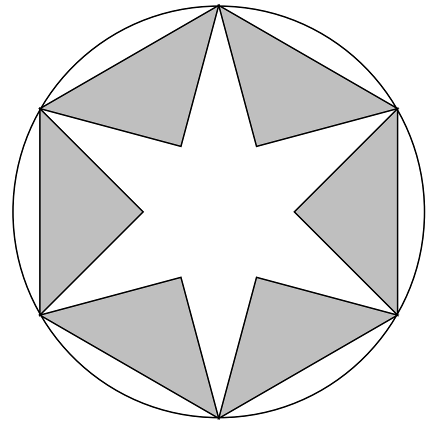
5. La risposta è **(E)**. Con riferimento alla figura a fianco, si ha infatti che l'area del triangolo equilatero di lato l incognito può essere determinata in due modi:
1) come somma di tre aree di tre triangoli di base l e di altezza 5, 7, 8
2) con la consueta formula dell'area, tenendo presente che l'altezza di un triangolo equilatero è $l\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Si ha quindi $\frac{l \cdot (5 + 7 + 8)}{2} = \frac{1}{2} l^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui $l = \frac{40}{3}\sqrt{3}$.

6. La risposta è **(B)**. I sei triangoli isosceli hanno due angoli di 75°. L'angolo compreso fra due lati di due triangoli isosceli aventi un vertice in comune è quindi $360° - (75° + 75° + 120°) = 90°$. Con riferimento alla figura a fianco, si osserva che l'area S richiesta può essere ottenuta sottraendo dall'area dell'esagono regolare (che ha lato pari al raggio della circonferenza circoscritta) l'area di 6 triangoli rettangoli isosceli di lato $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si ha quindi

$$S = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} - 6 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \text{ da cui } S = \frac{6\sqrt{3}}{4} - \frac{6}{4} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$$



7. La risposta è **(E)**. Il rapporto tra le due aree è massimo quando è massima l'area di T: infatti in questo caso l'area di P assume il valore minimo. T è un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è lunga 1, ed ha area massima quando è isoscele. Infatti un tale triangolo può essere inscritto in una semicirconferenza di diametro 1 ed assume area massima quando l'altezza relativa all'ipotenusa è massima, cioè vale $\frac{1}{2}$. In questo caso l'area di T vale $\frac{1}{4}$ e quella di P vale $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, e dunque il rapporto è $\frac{1}{15}$.

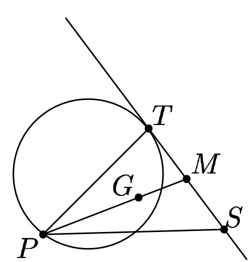
8. La risposta è **(B)**. Si tratta di un segmento di parabola con il vertice $V = (0, 2)$ e intersezioni con gli assi $A = (-\sqrt{5}, 0)$ e $B = (\sqrt{5}, 0)$. Due dei tre punti devono trovarsi nello stesso quadrante, e quindi la loro distanza non può superare la lunghezza del segmento AV, che è 3 per il teorema di Pitagora (infatti, la parte di regione compresa nel primo quadrante è interamente contenuta nel cerchio di diametro BV e quella contenuta nel secondo quadrante è interamente contenuta nel cerchio di diametro AV). Si osservi che tutte le altre risposte sono false:
(A) almeno due dei tre punti hanno distanza $\geq \frac{\sqrt{5}}{2}$: ovviamente i punti si possono prendere vicini quanto si vuole!
(C) la somma delle distanze fra i punti è $\leq \frac{9}{2}\sqrt{5}$: basta prendere A, B e V per avere $2\sqrt{5}+6 > \frac{9}{2}\sqrt{5}$.
(D) la somma dei quadrati delle distanze fra i punti è ≤ 38: prendendo A, B, B la somma dei quadrati delle distanze è uguale a 40 (se si cercano 3 punti *distinti* con somma dei quadrati delle distanze maggiore di 38, basta prendere A, B, C con C molto vicino a B).
(E) il prodotto delle distanze tra i punti è $\leq 16\sqrt{5}$: prendendo ancora A, B e V si ha $18\sqrt{5} > 16\sqrt{5}$.

9. La risposta è **(D)**. Se indichiamo con x, y e z le lunghezze dei lati in ordine crescente, le ipotesi si traducono come

$$\begin{cases} xy + xz + yz = \dfrac{228}{2} = 114 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133 \\ xz = y^2 \end{cases}.$$

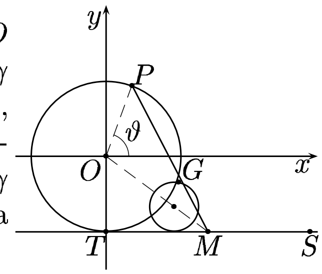
Dalle prime due otteniamo $(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2)+2(xy+xz+yz) = 361$ e dunque $x+y+z = 19$. Sostituendo la terza nella prima otteniamo $y(x+y+z) = xy+xz+yz = 114$, da cui $y = 6$. Perciò il volume è $xyz = y^3 = 216$. D'altra parte un parallelepipedo di lati $x = 4, y = 6, z = 9$ soddisfa le ipotesi.

10. La risposta è **(C)**. Indichiamo con M il punto medio del segmento TS (esso ovviamente resta fermo al variare di P su γ). Il baricentro G del triangolo PST giace sicuramente sulla mediana PM, inoltre $MG = \frac{1}{3}MP$ perché il baricentro divide la mediana in due parti, e la parte che contiene il vertice è lunga il doppio della parte che contiene il punto medio del lato. Quindi se facciamo un'omotetia (ovvero una "dilatazione") del piano centrata in M e con scala $\frac{1}{3}$, il punto P viene mandato in G.



Le omotetie mandano circonferenze in circonferenze, e il rapporto tra i raggi è esattamente la scala dell'omotetia. Segue che, al variare di P sulla circonferenza γ, il punto G varia su una circonferenza γ' il cui raggio è un terzo di quello di γ e quindi la lunghezza di γ' è un terzo di quella di γ.

SECONDA SOLUZIONE



Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, posso scegliere O in modo che coincida col centro di γ, l'unità di misura pari al raggio di γ e l'orientazione degli assi in modo che le coordinate di T siano, ad esempio, $(0,\ -1)$ e la retta tangente a γ abbia equazione $y = -1$. Un punto S appartenente a tale tangente avrà coordinate $(a,\ -1)$, mentre un punto P di γ avrà coordinate $(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)$. Le coordinate del baricentro G saranno allora $\left(\dfrac{x_P + x_S + x_T}{3},\ \dfrac{y_P + y_S + y_T}{3}\right)$, cioè $\left(\dfrac{\cos\vartheta + a}{3},\ \dfrac{\sin\vartheta - 2}{3}\right)$.

Le equazioni parametriche di γ' saranno quindi $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\cos\vartheta + \dfrac{a}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}\sin\vartheta - \dfrac{2}{3} \end{cases}$, che rappresentano una circonferenza di raggio $\dfrac{1}{3}$ e centro $\left(\dfrac{a}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ (l'equazione cartesiana di tale circonferenza è $9x^2 + 9y^2 - 6ax + 12y + 3 + a^2 = 0$).

11. La risposta è 199. Infatti se n avesse 1 o 2 cifre, $n \leq 99$, e allora $S(n) \leq 18$ e $S(S(n)) \leq 9$, dunque n ha almeno tre cifre. Osserviamo che per $n \leq 198$, ancora $S(n) \leq 18$. Invece se $n = 199$, $S(n) = 19$ e $S(S(n)) = 10$, come cercato.

12. La risposta è 864. Per ogni scelta del primo numero, il secondo numero può essere scelto in 6 modi per soddisfare la prima condizione; ancora, per ogni possibile somma dei primi 2 numeri esistono 4 scelte possibili per il terzo affinché la seconda condizione sia soddisfatta; infine, per ogni possibile scelta dei primi 3 numeri esistono 3 possibilità per il quarto. Dunque il numero totale di possibilità è $12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 = 864$.

13. La risposta è 100. È necessario contare le coppie (non ordinate) di vertici non appartenenti ad una stessa faccia. In ogni vertice si incontrano 3 facce e in ciascuna di esse ci sono 2 vertici che non sono su una faccia che contiene anche il vertice iniziale (totale 6) più 2 in comune con un'altra faccia (che sono contati due volte e sono quindi in realtà in totale 3) più il vertice stesso: quindi dobbiamo escludere dal conto 10 vertici che non danno luogo a diagonali. Ma i vertici del dodecaedro sono $12 \cdot 5/3 = 20$ (12 facce pentagonali, ma che si incontrano a 3 a 3), quindi per ognuno di questi dobbiamo considerare $20 - 10 = 10$ vertici possibili come altro estremo di una diagonale. In totale le diagonali sono $20 \cdot 10/2 = 100$, dove si è diviso per 2 poiché, moltiplicando, ogni diagonale viene contata due volte.

14. La risposta è 21. Indichiamo con V_s la velocità della scala, in *scalini per unità di tempo*, e con V_m la velocità di Marco, nella medesima unità di misura. Se T_1 e T_2 sono, rispettivamente, i tempi impiegati da Marco per percorrere la scala nel verso concorde e nel verso discorde, allora valgono le seguenti relazioni

$$(V_m + V_s)T_1 = N, \tag{1}$$
$$(V_m - V_s)T_2 = N, \tag{2}$$
$$V_m \cdot T_1 = 15, \tag{3}$$
$$V_m \cdot T_2 = 35, \tag{4}$$

dove N è il numero di scalini che Marco calpesterebbe se la scala fosse ferma. Dalle formule (1) e (2) si deduce che

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N - 15}{35 - N}, \tag{5}$$

mentre dalle formule (3) e (4), si deduce che

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{15}{35}. \tag{6}$$

Mettendo insieme le due relazioni (5) e (6) ottenute, si ottiene

$$N = \frac{2 \cdot 15 \cdot 35}{15 + 35} = 21,$$

che è esattamente la media armonica tra i numeri 15 e 35.

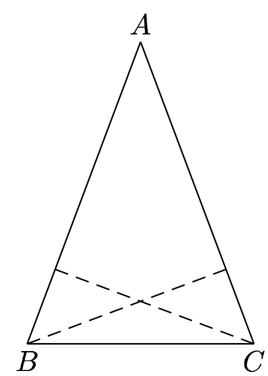
15. La risposta è 7. Che sia possibile realizzare sette pacchi con le proprietà richieste con sette tipi di giochi è dimostrato dalla seguente griglia, in cui A, B, C, D, E, F e G indicano i tipi di giochi e le colonne danno la composizione dei pacchi.

A	A	B	C	A	B	C
B	D	D	E	F	E	D
C	E	G	G	G	F	F

Inoltre sei tipi di giochi non sono sufficienti. Dimostriamo questo fatto per assurdo. Supponiamo che A, B, C, D, E e F siano sufficienti per sette pacchi. Complessivamente abbiamo ventuno giochi e quindi esiste un tipo di gioco, diciamo A, che compare almeno in tre pacchi distinti; gli altri giochi che compaiono in questi tre pacchi sono sei (due per tre) e devono essere tutti di tipi distinti tra loro e tutti diversi da A, avremmo allora sette tipi di giochi distinti, cioè un assurdo.

16. Si osservi che i numeri in questione sono alternativamente pari e dispari, perché si aggiunge 5 al quadrato del precedente. Perciò solo i termini di posto dispari possono fornire altri primi. Ma questi sono tutti multipli di 3 e maggiori o uguali a $x_1 = 9$. Infatti la successione è ovviamente crescente, e passando da x_n a $x_{n+2} = 5 + (5 + x_n)^2 = 30 + 10(x_n)^2 + (x_n)^4$ la divisibilità per 3 si conserva.

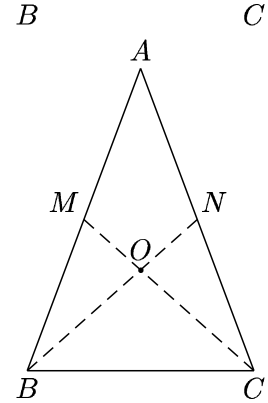
17. a) Siano B e C i vertici da cui partono le due altezze uguali, rispettivamente relative ai lati AC e AB. Calcolando l'area S del triangolo rispetto ad AB e ad AC e chiamando h la lunghezza comune delle due altezze, si ha



$$S = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{AC \cdot h}{2}$$

da cui $AB = AC$.

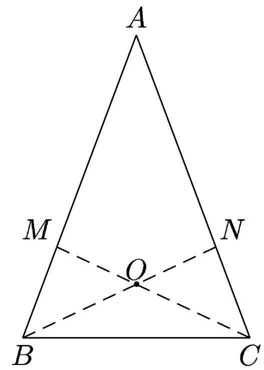
b) Siano B e C i vertici da cui partono le due mediane uguali, rispettivamente relative ai lati AC e AB, che intersecano nei punti medi rispettivamente N e M. Chiamiamo inoltre O il punto di incontro delle mediane (baricentro). Come è noto O divide ciascuna mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è lunga il doppio dell'altra: poiché però le due mediane hanno la stessa lunghezza, anche i due segmenti CO e BO (che sono lunghi i 2/3 della corrispondente mediana) hanno la stessa lunghezza e perciò il triangolo BOC è isoscele e i triangoli BOM e CON sono congruenti (hanno due lati corrispondenti e l'angolo compreso della stessa misura: CO e BO come detto, analogamente NO ed MO, e i due angoli $C\widehat{O}N$ e $B\widehat{O}M$ perché opposti al vertice).



Ma allora gli angoli $B\widehat{C}O$ e $C\widehat{B}O$ hanno la stessa misura (sono angoli alla base di un triangolo isoscele), come anche gli angoli $O\widehat{C}N$ e $O\widehat{B}M$ (sono angoli corrispondenti di triangoli congruenti). Quindi $B\widehat{C}A = B\widehat{C}O + O\widehat{C}A$ e $C\widehat{B}A = C\widehat{B}O + O\widehat{B}A$ sono congruenti e ABC è isoscele.

Altra dimostrazione: b) è un caso particolare di c).

c) Per il teorema di Talete, la retta del segmento BC è parallela a quella del segmento MN. Ma allora gli angoli $B\widehat{C}M$ e $C\widehat{M}N$ (e quelli $N\widehat{B}C$ e $B\widehat{N}M$) sono congruenti perché formati da parallele tagliate da una trasversale. Se O è il punto di incontro dei segmenti BN e CM, anche $C\widehat{O}B$ e $N\widehat{O}M$ sono congruenti perché opposti al vertice, quindi i triangoli BOC e MON sono simili. Ma allora



$$BO : ON = CO : OM$$

da cui, sommando nella proporzione,

$$BN : ON = CM : OM.$$

Ma, poiché $BN = CM$, anche $ON = OM$, cioè il triangolo MON (e quindi anche il triangolo BOC) è isoscele. Ma allora i triangoli MBC e NCB sono congruenti (hanno $CM = BN$, BC in comune e congruenti gli angoli compresi $N\widehat{B}C$ e $M\widehat{C}B$) e perciò gli angoli $B\widehat{C}A$ ed $A\widehat{B}C$ sono congruenti e il triangolo ABC è isoscele.