UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2005

GARA di SECONDO LIVELLO

17 febbraio 2005

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:__________ COGNOME:__________

Indirizzo:__________ Città:__________

SCUOLA:__________ CLASSE:_____ Città:__________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–15)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
ENI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Edoardo è andato in vacanza nella città di Altanbulat. Il suo aereo, all'andata, è partito da Milano alle 13:00 ed è arrivato ad Altanbulat alle 9:00 del giorno dopo (ora locale). Il volo di ritorno invece è partito da Altanbulat alle 9:00 ed è atterrato alle 15:00 dello stesso giorno a Milano (di nuovo, tutte le ore indicate sono secondo il fuso orario locale). Supponendo che i due viaggi abbiano avuto la stessa durata reale, quant'è la differenza di fuso orario tra l'Italia e Altanbulat?
   (A) Meno di tre ore
   (B) più di tre ore, ma meno di sei
   (C) più di sei ore, ma meno di nove
   (D) più di nove ore
   (E) non è possibile determinarla.

2. a, b, c sono tre numeri reali positivi tali che $a+b+c=1$. Quale delle seguenti condizioni è equivalente a imporre che a, b, c siano le misure dei lati di un triangolo non degenere?
   (A) $0 < |b-a| < \frac{1}{2}$, $0 < |c-b| < \frac{1}{2}$, $0 < |c-a| < \frac{1}{2}$
   (B) $a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$, $c < \frac{1}{2}$
   (C) $a+b < \frac{1}{2}$, $\quad b+c < \frac{1}{2}$, $\quad c+a < \frac{1}{2}$
   (D) $a \leq \frac{1}{3}$, $b \leq \frac{1}{3}$, $c \leq \frac{1}{3}$
   (E) nessuna delle precedenti.

3. Cinque amici fanno, rispettivamente, le seguenti affermazioni.
   "Comunque si scelga uno di noi, gli altri 4 mentono".
   "Comunque si scelga uno di noi, gli altri 4 dicono il vero".
   "Comunque si scelga uno di noi, ce n'è un altro che dice il vero".
   "C'è uno di noi tale che ogni altro dice il vero".
   "C'è uno di noi tale che ogni altro mente".
   Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta dalle precedenti?
   (A) Esattamente 1 dice il vero.
   (B) Esattamente 2 dicono il vero.
   (C) Esattamente 3 dicono il vero.
   (D) Esattamente 4 dicono il vero.
   (E) Non è possibile determinare il numero di coloro che dicono il vero.

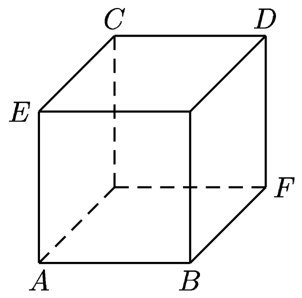
4. Quanti sono i polinomi $p(x)$ di secondo grado, a coefficienti interi e con 2 radici intere, tali che $p(8) = 1$? (Nota: ricordiamo che i numeri interi possono essere positivi, negativi o nulli)
   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** un numero finito maggiore di 3 **(E)** infiniti.

5. AB e CD sono due segmenti, entrambi lunghi 4, aventi il punto medio M in comune e tali che $B\widehat{M}D = 60°$. Indichiamo con X l'insieme di tutti e soli i punti che distano al più 1 da almeno uno dei due segmenti. Quanto misura la superficie di X?
   (A) $8 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$ **(B)** $16 - \frac{8}{3}\sqrt{3}$ **(C)** $16 - \frac{4}{3}\sqrt{3} + \pi$ **(D)** $16 - \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2\pi$ **(E)** $8 + 2\pi$.

6. Durante una festa, tre ragazze e tre ragazzi si siedono casualmente ad un tavolo rotondo. Qual è la probabilità che non ci siano due persone dello stesso sesso sedute a fianco?
   (A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{10}$ **(C)** $\frac{3}{20}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** $\frac{11}{36}$.

7. Al variare del parametro reale a, qual è il numero massimo di soluzioni per l'equazione $||x-1|-4| + x = a$?
   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** può averne infinite.

8. Dato un cubo di lato unitario (vedi figura), consideriamo il piano cui appartengono gli spigoli AB e CD e quello cui appartengono gli spigoli AE e FD. Questi due piani tagliano il cubo in quattro parti. Qual è il massimo tra i volumi di tali parti?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{1}{2}$.



9. Alberto e Barbara giocano con un dado. Dopo un po' si accorgono che il dado è truccato, e che il numero 1 esce più frequentemente degli altri 5 numeri (che invece restano equiprobabili). Decidono quindi che, quando esce 1, quel tiro è annullato e si tira di nuovo. Se si continua a lanciare il dado fino a quando non si ottengono 2 tiri validi, qual è la probabilità che la somma dei 2 numeri validi usciti sia 8?
(A) $\frac{3}{25}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{6}{25}$ **(E)** $\frac{1}{4}$.

10. Siano a, b interi positivi primi tra loro. Qual è il massimo valore che può assumere il massimo comun divisore fra $(a+b)^4$ e $a-b$?
(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 16 **(D)** 32 **(E)** può essere grande a piacere.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. Quanti sono gli interi compresi tra 1 e 2005 (inclusi) che hanno un numero dispari di cifre pari?

12. ABC è un triangolo con $AC = BC$ e $A\widehat{C}B < 60°$. Siano A' e B' due punti sui lati BC e AC rispettivamente tali che $AA' = BB' = AB$. Sia C' l'intersezione di AA' con BB'. Sapendo che $AC' = AB'$ e $BC' = BA'$, quanto vale l'ampiezza in gradi dell'angolo $A\widehat{C}B$?

13. Su una scacchiera 75×75 le righe e le colonne sono numerate da 1 a 75. Chiara vuole mettere una pedina in tutte e sole le caselle che abbiano una coordinata pari e l'altra multipla di 3. Quante pedine disporrà in tutto sulla scacchiera?

14. Due circonferenze C_1 e C_2 di centri A e B sono tangenti esternamente in T. Sia BD un segmento tangente a C_1 in D e sia TC il segmento tangente ad entrambe in T con $C \in BD$. Se AT è lungo 80 e BT è lungo 90, qual è la lunghezza di CD?

15. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi positivi x e y che soddisfano la relazione
$xy + 5(x + y) = 2005$?

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB > AC$; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sulla retta BC si prenda D tale che H sia punto medio di BD; sia poi E il piede della perpendicolare condotta da C ad AD. Dimostrare che $EH = AH$.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Determinare tutte le coppie $(m,\ n)$ di numeri interi positivi m e n tali che

$$\frac{3^m + 3}{2^n + 2^{n-1}}$$

sia un numero intero.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2005

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	A	C	D	B	E	B	C	C	1002	36	1706	48	10

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16 si assegnino(i punteggi suggeriti non sono cumulabili):

- **1 punto** per chi disegna correttamente la figura
- **4 punti** per chi dimostra che il triangolo ABD è isoscele
- **5 punti** per chi osserva anche l'uguaglianza degli angoli $D\widehat{A}H$, $B\widehat{A}H$
- **7 punti** per chi dimostra che E, H appartengono alla circonferenza di diametro AC
- **9 punti** per chi riconosce $B\widehat{A}H$ come angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AH
- **12 punti** ovviamente, per chi conclude la dimostrazione.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 17 si assegnino (i punteggi suggeriti non sono cumulabili):

- **1 punto** a chi nota le soluzioni con $n = 1$ e $n = 2$

- **2 punti** a chi nota che è possibile semplificare un fattore 3
- **3 punti** a chi fa entrambe le osservazioni precedenti
- **4 punti** a chi trova tutte le soluzioni (anche senza semplificare il fattore 3)
- **5 punti** a chi semplifica il fattore 3, trova tutte le soluzioni e congettura (senza dimostrazione) che non ve ne siano altre
- **5 punti** a chi semplifica il fattore 3 e cerca di utilizzare i prodotti notevoli per fattorizzare il numeratore (almeno in un caso)
- **8 punti** a chi risolve correttamente uno solo dei due casi (m pari oppure m dispari)
- **9 punti** a chi risolve correttamente uno dei due casi e fornisce la congettura corretta per l'altro caso
- **12 punti** ovviamente, per chi conclude la dimostrazione.

1. La risposta è **(C)**. Indichiamo con d la differenza di fuso orario tra l'Italia e Altanbulat. Traducendo tutte le ore nel fuso orario italiano, Edoardo parte alle 13 e arriva alle $9-d$ del giorno dopo, quindi impiega $24+(9-d)-13=20-d$ ore per il viaggio di andata. Nel ritorno invece parte alle $9-d$ e arriva alle 15, quindi impiega $15-(9-d)=6+d$ ore. Uguagliando le durate dei due viaggi otteniamo $20-d=6+d$ che ha come unica soluzione $d=7$. Quindi la differenza di fuso orario è 7 ore e il viaggio ha una durata reale di 13 ore.

2. La risposta è **(B)**. Infatti, dalla disuguaglianza triangolare abbiamo

$$a < b+c \Longleftrightarrow a+a < a+b+c = 1 \Longleftrightarrow a < \frac{1}{2}$$

e le altre due relazioni simmetriche che si ottengono scambiando a, b e c nelle disequazioni qui sopra. Quindi, le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

$$\begin{gathered} a,b,c \text{ sono i lati di un triangolo} \\ \Updownarrow \\ a < b+c, \quad b < a+c, \quad c < a+b \\ a < \frac{1}{2}, \quad b < \frac{1}{2}, \quad c < \frac{1}{2} \end{gathered}$$

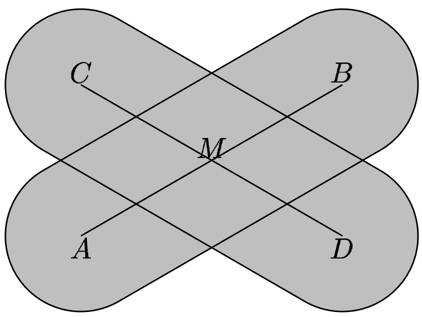
D'altra parte è semplice costruire controesempi che mostrano come le altre tre condizioni non siano equivalenti a quella richiesta:

- Se $a=b=c=\frac{1}{3}$ (triangolo equilatero), la **(A)** non vale ma è possibile costruire un triangolo;
- Se $a=b=\frac{1}{2}$ e $c=0$, la **(C)** vale ma non è possibile costruire un triangolo;
- Se $a=b=\frac{3}{8}$ e $c=\frac{2}{8}$, la **(D)** non vale ma è possibile costruire un triangolo.

3. La risposta è **(A)**. La prima affermazione non può essere vera, perché scegliendo uno degli altri si autocontraddice.
Quindi anche la seconda non può essere vera, perché scegliendo chi la dice, vi è il primo che mente.
Quindi anche la quarta non può essere vera, perché ve ne sono già due false.
Infine la terza e la quinta si contraddicono direttamente, quindi una ed una sola delle due è vera (in particolare è vera la quinta).

4. La risposta è **(C)**. Dette m, n le due radici (eventualmente coincidenti) del polinomio, si ha $p(x) = a(x-m)(x-n)$, ove a è il coefficiente di x^2, quindi intero anch'esso. Quindi $1 = p(8) = a(8-m)(8-n)$. Ma 1 si può ottenere come prodotto di tre interi solo se sono tutti e tre 1, oppure due sono -1 e l'altro è 1. Quindi si hanno le possibilità $a=1, m=n=7$ oppure $a=1, m=n=9$ oppure $a=-1, m=7, n=9$ (NB: scambiando m con n il polinomio non cambia). Quindi c'è *un* polinomio con *due* radici *distinte* e *due* altri polinomi con *due* radici *coincidenti*.

5. La risposta è **(D)**. Sia X_1 (rispettivamente X_2) il luogo dei punti con distanza $\leqslant 1$ dal solo segmento AB (rispettivamente CD). Chiaramente X_1 e X_2 sono congruenti e X è l'unione dei due. Allora $\text{Area}(X) = 2\text{Area}(X_1) - \text{Area}(X_1 \cap X_2)$.
X_1 è formato da un rettangolo di base 4 e lunghezza 2, unito a due semicerchi terminali con diametro sui lati minori. L'area di X_1 è pertanto $8+\pi$.
L'intersezione $X_1 \cap X_2$ è un parallelogrammo con entrambe le altezze lunghe 2 e un angolo di 60°, quindi è l'unione di due triangoli equilateri di lato $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. La sua area è $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.
In conclusione, $\text{Area}(X) = 16 - \frac{8\sqrt{3}}{3} + 2\pi$.



6. La risposta è **(B)**. Se fissiamo un ragazzo abbiamo che ci sono 5! possibili permutazioni degli altri 5 convitati, di queste quelle in cui ragazzi e ragazze sono alternati sono $3 \cdot 2 \cdot 2$ perché la persona alla destra del ragazzo fissato può essere una qualunque delle 3 ragazze, la persona ancor più a destra può essere uno dei due ragazzi rimasti, poi deve esserci una delle altre due ragazze e gli ultimi due posti devono necessariamente essere occupati dall'ultimo ragazzo e dall'ultima ragazza.
   La soluzione è quindi il numero di casi favorevoli fratto il numero di casi possibili, cioè $\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5!} = \frac{1}{10}$.

7. La risposta è **(E)**. Si ha infatti che, per ogni $x \leq -3$, $x - 1 \leq 0$ e quindi $|x-1| = 1 - x$, inoltre $|x-1| - 4 = -x - 3 \geq 0$, e l'equazione si può semplificare così:

$$||x-1|-4| + x = |-x+1-4| + x = -x - 3 + x = -3$$

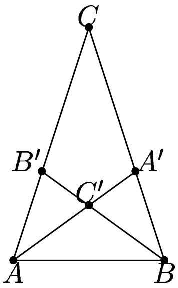
   Pertanto se $a = -3$ l'equazione ha infinite soluzioni.

8. La risposta è **(B)**. Siano G e H gli altri due vertici del cubo, con AG spigolo del cubo. Fissiamo un riferimento cartesiano, con origine in A e assi x, y, e z lungo AB, AE, AG. Le quattro regioni sono caratterizzate dalle condizioni $\{x \leqslant z; y \leqslant z\}$, $\{x \leqslant z; y \geqslant z\}$, $\{x \geqslant z; y \leqslant z\}$, $\{x \geqslant z; y \geqslant z\}$.
   Tagliamo il cubo con un terzo piano, passante per AG e HD. Le regioni risultanti sono sei e sono caratterizzate dalle condizioni $\{x \leqslant y \leqslant z\}$ e analoghe, ottenute permutando le incognite.
   Ciò implica, tra l'altro, che delle quattro regioni iniziali, due sono tagliate dal terzo piano (e sono quelle che risulteranno di volume massimo), mentre le altre due non lo sono.
   Le sei regioni ottenute sono tutte congruenti, per motivi di simmetria, e quindi hanno ognuna volume $\frac{1}{6}$. Da questo si deduce che delle quattro regioni descritte dal quesito, due hanno volume $\frac{1}{3}$ e due hanno volume $\frac{1}{6}$.
   Seconda Soluzione
   È facile verificare che la piramide con base $CDFG$ e vertice in A non è tagliata dai piani in questione. Inoltre, delle cinque facce della piramide, tre sono anche facce del cubo (o parti di esse), mentre le restanti due sono complanari ai piani di sezione.
   Questo significa che la piramide è una delle quattro regioni in cui è tagliato il cubo. Analogamente, anche la piramide simmetrica $DBAEH$ è un'altra di tali regioni. Dato che esse hanno ognuna volume $\frac{1}{3}$, le restanti due parti non possono avere volume maggiore, quindi il massimo dei volumi è $\frac{1}{3}$.

9. La risposta è **(C)**. Dato che se esce 1 si tira di nuovo, è come se il dado avesse solo 5 facce. Ora per fare 8 qualunque uscita iniziale va bene, ma al secondo tiro valido solo il complemento a 8 va bene. Quindi la probabilità richiesta è uguale a quella di ottenere un dato numero al primo colpo, ossia $\frac{1}{5}$.
   Seconda Soluzione
   Le possibili coppie ordinate di risultati validi sono 25. Di queste solo $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$ vanno bene, quindi la probabilità è $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

10. La risposta è **(C)**. Consideriamo anzitutto $d = MCD(a+b, a-b)$. Il MCD di due numeri divide anche la loro somma e la loro differenza, quindi d divide $2a$ e $2b$. Dato che a e b sono primi fra loro, nessun primo dispari può comparire in d, e il 2 compare al massimo con esponente 1 (ciò avviene se e solo se a e b sono entrambi dispari).
    Passando al caso $c = MCD((a+b)^n, a-b)$ si osserva che i fattori primi di $(a+b)^n$ sono gli stessi di $a+b$, con gli esponenti moltiplicati per n, dunque c è una potenza di 2 (e resta 1 se a e b non sono entrambi dispari). In tal caso però $a+b$ ed $a-b$ non possono essere entrambi multipli di 4, perché la loro differenza $2b$ non lo è.
    Ora se $a-b$ non è multiplo di 4, nemmeno c lo può essere. Dunque rimane il caso in cui $a+b$ non è multiplo di 4, e quindi c può essere al massimo 2^n. Ma questo valore si può sempre ottenere, basta prendere ad esempio $a = 2^n + 1$, $b = 1$.

11. La risposta è 1002. Se la cifra delle unità di un intero n è pari, allora la cifra delle unità di $n+1$ è dispari, mentre tutte le altre cifre di n e $n+1$ sono uguali. Perciò, se n ha un numero pari di cifre pari, allora $n+1$ ne ha un numero dispari; e se n ha un numero dispari di cifre pari, allora $n+1$ ne ha un numero pari. Quindi, esattamente uno tra n e $n+1$ ha un numero dispari di cifre pari. Suddividendo gli interi tra 2 e 2005 nelle 1002 coppie $(2,\ 3)$, $(4,\ 5)$, $(6,\ 7), \ldots, (2004,\ 2005)$, si deduce che tra essi esattamente 1002 hanno un numero dispari di cifre pari. Poiché 1 non ha cifre pari, e quindi non è da contare, la risposta è 1002.



12. La risposta è 36. Infatti i triangoli CAB e BAB' sono isosceli con in comune un angolo adiacente alla base, per cui sono simili. Analogamente BAB' e $AB'C'$ sono simili. Riapplicando lo stesso ragionamento ai triangoli ABA' e $BA'C'$, si trova che tutti e cinque tali triangoli sono simili. Allora $A\widehat{C}B = B'\widehat{A}C' = A'\widehat{A}B = A\widehat{B}B' = C'\widehat{B}A'$; del resto, la somma di questi cinque angoli equivale alla somma degli angoli interni di ABC, e quindi $= 180°$. Perciò $A\widehat{C}B = \dfrac{180°}{5} = 36°$.

13. La risposta è 1706. Infatti, le caselle (x, y) in cui c'è una pedina possono essere divise in due gruppi:

(a) x multiplo di 2 e y multiplo di 3;

(b) x multiplo di 3 e y multiplo di 2.

Poiché ci sono sulla scacchiera $\left[\dfrac{75}{2}\right]$ colonne con ascissa multipla di 2 e $\left[\dfrac{75}{3}\right]$ righe con ordinata multipla di 3, il numero di caselle del primo tipo è

$$\left[\frac{75}{2}\right] \cdot \left[\frac{75}{3}\right] = 37 \cdot 25 = 925$$

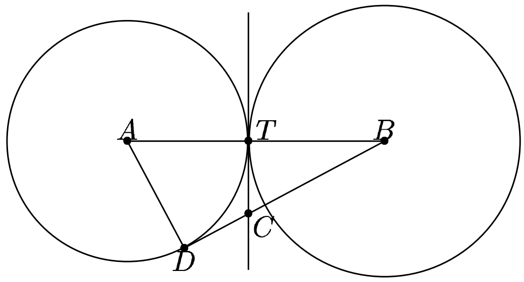
(qui $[x]$ denota la parte intera di x, cioè il più grande interno minore o uguale a x).
Per simmetria (poiché la scacchiera è quadrata, basta ruotarla di 90°) il numero di caselle del secondo tipo è uguale. In questo modo però abbiamo contato due volte le caselle che rientrano in *entrambi* i gruppi, ad esempio $(6, 6)$. Per come sono definiti i due gruppi tali caselle sono tutte e sole quelle in cui ascissa e ordinata sono multiple di 6, il cui numero è

$$\left[\frac{75}{6}\right] \cdot \left[\frac{75}{6}\right] = 12 \cdot 12 = 144$$

Dobbiamo perciò sottrarre dal totale il numero di queste caselle che sono state contate due volte. Ricapitolando, si ha

$$\begin{aligned}&\textit{Caselle con una pedina} = \textit{Caselle nel primo gruppo} + \\ &\quad + \textit{Caselle nel secondo gruppo} - \textit{Caselle in entrambi i gruppi} = \\ &\quad = 925 + 925 - 144 = 1706\end{aligned}$$

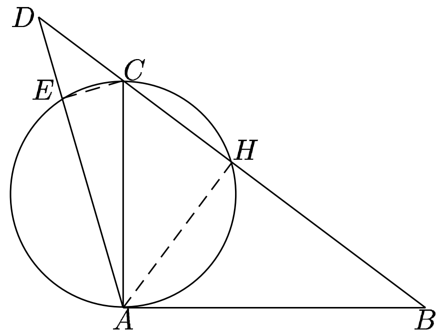
14. La risposta è 48. AT è un raggio della circonferenza C_1; poiché anche AD lo è, anch'esso misura 80. Inoltre l'angolo $A\widehat{D}B$ è retto; per il teorema di Pitagora allora BD misura $\sqrt{(80+90)^2 - 80^2} = 150$. Ma i triangoli ABD e BTC sono simili (sono rettangoli ed hanno l'angolo in B in comune), quindi $BD : BT = BA : BC$ e BC misura 102, per cui la lunghezza di CD è 48.



15. La risposta è 10. Sommando 25 ad entrambi i membri si ottiene la relazione equivalente $xy + 5(x + y) + 25 = 2030$ da cui, raccogliendo al primo membro, si ricava $(x+5)(y+5) = 2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$. Poiché x è intero, allora anche $x+5$ è intero, e lo stesso vale per y. Dunque è sufficiente distribuire i numeri primi della fattorizzazione di 2030 tra i due fattori $x+5$ e $y+5$, in tutti i modi possibili.

Poiché x dev'essere positivo, allora $x+5$ deve valere almeno 6, così come y. In particolare, i due fattori devono essere entrambi positivi. Inoltre l'equazione è simmetrica in x e y, quindi si può supporre che l'unico fattore 2 divida $x+5$. Per $x+5$ si hanno allora 5 possibilità: $2\cdot 5$, $2\cdot 7$, $2\cdot 29$, $2\cdot 5\cdot 7$, $2\cdot 5\cdot 29$. Gli altri casi sono $x+5=2$, da escludere, $x+5=2\cdot 7\cdot 29$ e $x+5=2\cdot 5\cdot 7\cdot 29$, da escludere perché implicano rispettivamente $y+5=5$ e $y+5=1$. I casi in cui 2 divide $y+5$ sono altrettanti, e sono tutti distinti dai precedenti perché in 2030 v'è un solo fattore 2. Quindi la risposta è $5\cdot 2=10$.

16. Il triangolo ABD è isoscele su BD, perché AH è altezza e mediana. AH è pertanto anche bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}D$, e quindi gli angoli $D\widehat{A}H$, $B\widehat{A}H$ sono uguali. Gli angoli $A\widehat{E}C$, $A\widehat{H}C$ sono retti per costruzione; quindi E ed H appartengono alla circonferenza γ avente AC come diametro. $D\widehat{A}H$ e $B\widehat{A}H$ sono angoli alla circonferenza per γ; $D\widehat{A}H$ insiste sull'arco EH, $B\widehat{A}H$ insiste sull'arco AH (quest'ultimo si trova nella "posizione limite", essendo il lato AB tangente a γ in A). Dunque, gli archi EH, AH di γ sono uguali, e perciò sono uguali anche le corde EH, AH, come si doveva dimostrare.



17. Le soluzioni sono tutte le coppie di questi tre tipi:
   (a) $(m,1)$ per ogni m intero positivo
   (b) $(m,2)$ per ogni m intero positivo
   (c) $(m,3)$ per ogni m intero positivo pari

Possiamo innanzitutto raccogliere un fattore 3 dal numeratore e dal denominatore della frazione:

$$\frac{3^m+3}{2^n+2^{n-1}}=\frac{3(3^{m-1}+1)}{2^{n-1}(2+1)}=\frac{3^{m-1}+1}{2^{n-1}}$$

Quindi dobbiamo determinare per quali potenze di 2 è divisibile il numero $3^{m-1}+1$. È banale notare che questo numero è sempre dispari, perciò $(m,1)$ e $(m,2)$ sono soluzioni per qualsiasi valore di m. Ora, scomponiamo il numeratore facendo uso di questi prodotti notevoli:

$$x^k+y^k=(x+y)(x^{k-1}-x^{k-2}y+x^{k-3}y^2+\cdots-xy^{k-2}+y^{k-1})$$

valido per k dispari, e

$$x^k-y^k=(x+y)(x^{k-1}-x^{k-2}y+x^{k-3}y^2+\cdots+xy^{k-2}-y^{k-1})$$

valido per k pari. Dal primo, con $x=3, y=1$, abbiamo

$$3^{m-1}+1=(3+1)(3^{m-2}-3^{m-3}+3^{m-4}-\cdots-3+1)$$

per m pari. Quindi $3^{m-1}+1$ è multiplo almeno di 4 quando m è pari. Può essere multiplo di 8? No, perché nella seconda parentesi ci sono un numero dispari $(m-3)$ di termini dispari, quindi la loro somma è un numero dispari.
Analogamente, dal secondo prodotto notevole otteniamo

$$3^{m-1}-1=(3+1)(3^{m-2}-3^{m-3}+3^{m-4}-\cdots+3-1)$$

cioè $3^{m-1}-1$ è multiplo di 4 quando m è dispari (in realtà è multiplo anche di 8 perché stavolta nella parentesi ci sono un numero pari di termini, ma ciò non ci servirà nella dimostrazione). Allora, poichè $3^{m-1}+1$ è un multiplo di 4, non può esserlo anche $(3^{m-1}-1=+2=3^{m-1}+1$. Quindi $3^{m-1}+1$ è multiplo di 2 ma non di 4 nel caso in cui m sia dispari.
Ricapitolando, abbiamo:

- Per m pari, $3^{m-1}+1$ è multiplo di 4 ma non di 8, quindi le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo $(m,1)$, $(m,2)$ e $(m,3)$ (per ogni m pari)
- Per m dispari, $3^{m-1}+1$ è multiplo di 2 ma non di 4, quindi le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo $(m,1)$ e $(m,2)$ (per ogni m dispari)