

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2010
GARA di SECONDO LIVELLO



MIUR

Pisa, 3 febbraio 2010

Caro collega,

ti inviamo come d'accordo il materiale della gara di Matematica di secondo livello che, come già avvenuto negli anni scorsi, è unica per il Biennio ed il Triennio. Questo materiale consiste di:

1. testo della gara di secondo livello;
2. scheda dei risultati distrettuali;
3. scheda statistica distrettuale.

Organizzazione

Come al solito, la gestione della gara di selezione distrettuale del 9 febbraio è lasciata completamente all'iniziativa e all'organizzazione dei responsabili distrettuali. Ti raccomandiamo soltanto che la gara abbia la durata di 3 ore e che si svolga tassativamente **nella mattina** del giorno prefissato (9 febbraio), onde garantire la segretezza dei quesiti. Questo è tanto più essenziale, data la pubblicazione delle soluzioni sul web la mattina successiva. Per garantire l'obiettività delle selezioni, ti preghiamo di curare particolarmente la serietà e la regolarità dello svolgimento della prova, annullando senza esitazione tutti gli elaborati che presentano gravi irregolarità.

Correzione degli elaborati

Le soluzioni e le indicazioni per la correzione non sono incluse in questo plico, ma verranno pubblicate nel sito internet <http://olimpiadi.dm.unibo.it> il mattino successivo alla gara. In ogni caso, il giorno dopo la gara, le soluzioni e le indicazioni per la correzione ti saranno spedite per posta elettronica. Solo in caso di difficoltà, è possibile richiedere una copia cartacea delle soluzioni all'UMI, che farà un invio per posta prioritaria. La Commissione auspica così di rendere meno credibili le voci di irregolarità che, purtroppo, accompagnano sempre simili occasioni. In ogni caso, qualora tu sia a conoscenza di elementi che possano invalidare le prove o comunque renderne sospetta la regolarità, ti preghiamo di comunicarci. Per la correzione degli elaborati, se vorrai, potrai farti affiancare da qualche collega, anche di altra scuola (questo potrebbe avere un buon effetto promozionale), fermo restando che la responsabilità della valutazione rimane tua.

Selezione dei partecipanti alla gara nazionale

Come già avvenuto negli anni passati, ogni distretto avrà una quota predeterminata di studenti invitati a Cesenatico, che è già stata pubblicata nel suddetto sito. Sottolineiamo che, come già sperimentato con successo negli anni scorsi, ogni Responsabile decide autonomamente, sulla base dei risultati della gara di febbraio, gli allievi che compongono la quota del suo distretto e li segnala alla Commissione. Il responsabile dovrà trascrivere nella scheda **solo un numero di nominativi pari alla quota del distretto**, e trasmettere alla Commissione *esclusivamente* gli elaborati originali degli studenti prescelti. La gara di Cesenatico si svolgerà nei giorni 7–8–9 maggio e ad essa parteciperanno circa 300 studenti. Si consiglia di verificare preliminarmente la disponibilità degli allievi selezionati alla partecipazione alla gara di Cesenatico, in quanto non saranno consentite sostituzioni dopo la pubblicazione dell'elenco degli invitati.

Criteri per la selezione

La pubblicazione delle quote distrettuali con un certo anticipo e dell'algoritmo di calcolo delle medesime ha come (non unico) scopo quello di permetterti di migliorare il "punteggio" che ogni distretto ottiene alla gara di Cesenatico, di importanza fondamentale per il calcolo della quota distrettuale. Per questo scopo, hai piena libertà di scelta nella selezione dei partecipanti a Cesenatico: qualunque criterio ragionevole può essere utilizzato, purché sia comunicato ai referenti di istituto (meglio ancora se riesci a concordare tale criterio con loro, magari con discussione in un'opportuna assemblea). Ovviamente, eventuali "errori" nella selezione causeranno un abbassamento del punteggio del distretto e, a lungo andare, una perdita di posti nella quota distrettuale.

Naturalmente noi consigliamo, laddove le condizioni ragionevolmente lo permettono, un'ampia partecipazione di giovani anche alla gara nazionale. A questo scopo, si suggerisce di valutare i risultati degli studenti del biennio anche in senso relativo, e non solo sulla base della graduatoria aritmetica, in modo

che, quando la differenza di punteggio sia abbastanza piccola, il migliore del biennio possa sopravanzare il secondo o il terzo del triennio.

Come riferimento eventuale, ma **senza che vi sia alcun obbligo da parte tua di applicarla**, ti ricordiamo la regoletta suggerita negli anni scorsi.

“Qualora la quota distrettuale sia di almeno 4 (rispettivamente 7, 11), la graduatoria del distretto deve essere modificata aumentando del 20% il punteggio del primo classificato (rispettivamente dei primi due, dei primi tre) fra gli studenti del biennio, e la selezione deve essere effettuata in base a questa graduatoria modificata. In caso di parità fra uno studente del biennio ed uno del triennio, la preferenza va allo studente del biennio.”

La commissione nazionale formulerà l'elenco dei partecipanti alla Gara Nazionale tenendo conto delle segnalazioni pervenute. Il giudizio della commissione è insindacabile.

Gara a squadre

Come già avvenuto negli anni passati, a Cesenatico avrà luogo anche la gara a squadre nazionale per la quale provvederemo a scegliere un numero adeguato di squadre partecipanti che verranno tempestivamente avvisate. Anche quest'anno saranno convocate a tale gara le squadre migliori classificate in gare a squadre locali effettuate in ambito almeno distrettuale, che ormai da svariati anni hanno grande successo in molte parti d'Italia.

Trasmissione dati e statistiche

Allegato troverai il modulo per le statistiche della gara distrettuale. Avrai certamente notato che l'anno scorso sono state distribuite le statistiche aggregate per regione e a livello nazionale. La stragrande maggioranza dei responsabili distrettuali ha contribuito alla raccolta dei dati. Preghiamo caldamente quei pochissimi che l'anno scorso non hanno assolto l'impegno di non far mancare quest'anno il loro contributo, in modo che sia possibile anche per quest'anno inviare la lista delle statistiche. Sarebbe decisamente preferibile che i dati relativi alla gara di febbraio venissero inseriti direttamente nell'area appositamente prevista sul sito delle olimpiadi

<http://olimpiadi.dm.unibo.it/responsabili/>

utilizzando come credenziali di accesso la coppia username–password personale che ti è stata comunicata in occasione degli scorsi giochi di Archimede (naturalmente ti preghiamo di mantenere assolutamente riservata la password per evitare intrusioni nel sito). In particolare è possibile indicare i nominativi degli allievi che intendi selezionare per la partecipazione alla gara di Cesenatico, ovviamente **tanti quanti ne prevede la quota che è stata assegnata al tuo distretto**. L'invio dei dati per via informatica ci consentirà di snellire il lavoro e di rendere immediatamente disponibili i nomi degli ammessi. Se non ti risultasse possibile o agevole l'utilizzo del nostro sito, ti preghiamo di allegare la scheda statistica al plico contenente i compiti dei ragazzi segnalati e la scheda dei risultati (**un plico unico e una sola graduatoria da ogni distretto**), che deve essere spedito via posta in modo che possa pervenire entro il 28 marzo 2010 al seguente indirizzo:

Segreteria scientifica delle Olimpiadi di Matematica
c/o Dipartimento di Matematica Applicata “U. Dini”
Università di Pisa, via Filippo Buonarroti 1/c - 56127 Pisa.

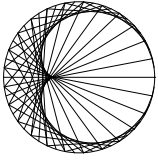
Ti ringraziamo per la collaborazione e speriamo di poterti incontrare a Cesenatico.

La Commissione Nazionale delle Olimpiadi

Progetto Olimpiadi della Matematica

Dipartimento di Matematica Applicata – Via Filippo Buonarroti 1/c - 56127

E-mail: villani@p2p.it, <http://olimpiadi.dm.unibo.it>



Progetto Olimpiadi di Matematica 2010
GARA di SECONDO LIVELLO



SCHEDA STATISTICA – GARA DISTRETTUALE
(Da restituire entro il **28 marzo 2010**)

Distretto: _____

Numero dei partecipanti biennio: _____

Numero dei partecipanti triennio: _____

Punteggio Totale	91–100	81–90	71–80	61–70	51–60	41–50	31–40	≤30
Numero di Studenti								

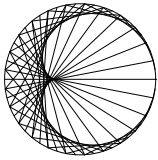
Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Risposte esatte														
Risposte errate														
Nessuna risposta														

Punteggio Esercizi 15, 16 e 17	>8	5–8	1–4	0
Numero di Studenti es. 15				
Numero di Studenti es. 16				
Numero di Studenti es. 17				

Progetto Olimpiadi della Matematica

Dipartimento di Matematica Applicata - Via Filippo Buonarroti 1/c - 56127 - Pisa

E-mail: villani@p2p.it, <http://olimpiadi.dm.unibo.it>



UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2010
GARA di SECONDO LIVELLO



SCHEMA DEI RISULTATI DISTRETTO

(Da restituire entro il **28 marzo 2010** assieme ai compiti dei **sol**i studenti segnalati (numero di compiti pari alla quota distrettuale))

Distretto: _____

Numero dei partecipanti biennio: _____

Numero dei partecipanti triennio: _____

Studenti segnalati per la partecipazione alla successiva prova di selezione.

Cognome e Nome	Sesso	Classe	Scuola	Punteggio		
				Es. 1-14	Es. 15-17	Totale
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						

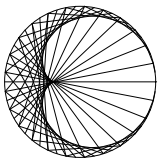
Firma del responsabile distrettuale che ha coordinato la raccolta dei dati:

Prof. _____

Progetto Olimpiadi della Matematica

Dipartimento di Matematica Applicata - Via Filippo Buonarroti 1/c - 56127 - Pisa

E-mail: villani@p2p.it, <http://olimpiadi.dm.unibo.it>



9 febbraio 2010

- 1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. **NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.**
- 2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
- 3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
- 4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
- 5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 10**.
- 6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome: _____ Cognome: _____

Indirizzo: _____ Città: _____

Scuola: _____ Anno di corso: _____ Città: _____

e-mail: _____

Codice fiscale: _____ Nazionalità: _____

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1-14)		×5 =	
numero degli esercizi senza risposta		×1 =	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Con il contributo della società editrice **Zanichelli**

Visitate il sito internet delle olimpiadi: <http://olimpiadi.dm.unibo.it>

Problemi a risposta multipla – 5 punti

- 16 coni stradali sono messi in linea retta a distanza di 10 metri uno dall'altro. Si vuole dipingere sulla strada una linea continua che vada dal primo all'ultimo cono. Sapendo che per dipingere 100 metri di linea continua sono necessari 6 litri di vernice, quanti litri di vernice sono necessari per completare questo lavoro?
(A) 8,4 (B) 9 (C) 9,6 (D) 10 (E) nessuna delle precedenti.
- Sia ABC un triangolo equilatero di centro O e area 1. Siano D, E, F i punti simmetrici di O rispetto ai tre lati del triangolo. Quanto vale l'area in comune ai triangoli ABC e DEF ?
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{2}{3}$.
- In un'isola ci sono due tipi di abitanti: i cavalieri, che dicono sempre la verità, e i furfanti, che mentono sempre. Abbiamo incontrato su quest'isola un gruppo di quattro abitanti che, interrogati sulla loro identità, hanno risposto:
A: "C'è almeno un furfante tra noi."
B: "Ci sono al massimo due cavalieri tra noi."
C: "Ci sono almeno tre furfanti tra noi."
D: "Non ci sono cavalieri tra noi."
Quanti cavalieri ci sono in questo insieme di quattro abitanti?
(A) Nessuno (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) tutti.
- Antonio, Beppe, Carlo e Duccio si distribuiscono casualmente le 40 carte di un mazzo, 10 a testa. Antonio ha l'asso, il due e il tre di denari. Beppe ha l'asso di spade e l'asso di bastoni. Carlo ha l'asso di coppe. Chi è più probabile che abbia il 7 di denari?
(A) Antonio (B) Beppe (C) Carlo (D) Duccio
(E) due o più giocatori hanno la stessa probabilità di averlo.
- Per quanti interi relativi n si ha che $\frac{3n}{n+5}$ è intero e divisibile per 4?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) più di 8.
- La casa di Dante si trova nel punto D ai piedi di una montagna conica con il diametro di base di 4 km e cima nel punto C . Si sa che D dista da C 4 km in linea retta e che, detto P il punto diametralmente opposto a D rispetto alla base della montagna, la porta dell'Inferno si trova a $\frac{3}{4}$ del segmento CP , più vicino a P . Quale distanza deve percorrere Dante al minimo (camminando sulle pendici della montagna) per poter raggiungere la porta dell'Inferno da casa sua?
(A) $\pi + 1$ km (B) 5 km (C) 2π km (D) 7 km (E) $2\pi + 1$ km.
- Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero $(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.
- Nella classe di Sergio, dopo la correzione dell'ultimo compito di matematica, al quale tutti gli alunni erano stati presenti, la media aritmetica delle insufficienze è risultata 4,6, mentre la media aritmetica delle sufficienze è risultata 7,1. Sapendo che il professore ha dato soltanto voti interi, quanti alunni ci sono al minimo nella classe di Sergio?
(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 24 (E) 30.
- I rossi e i verdi stanno facendo una battaglia a gavettoni. La base dei rossi è un'area a forma di triangolo equilatero di lato 8 metri. I verdi non possono entrare nella base dei rossi, ma possono lanciare i loro proiettili nella base stando comunque fuori dal perimetro. Sapendo che i verdi riescono a colpire un bersaglio fino ad una distanza massima di 1 metro, quanto è grande (in metri quadrati) la zona all'interno della base dei rossi al sicuro dalla portata di tiro dei verdi?
(A) $19\sqrt{3} - 24$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $19 - 8\sqrt{3}$
(E) ogni punto dell'area rossa è a portata di tiro dei verdi.

10. Quattro interi positivi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ sono tali che, dati due qualunque di essi, il loro massimo comun divisore è maggiore di 1, ma $\text{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$. Qual è il minimo valore che può assumere a_4 ?
(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 30 (E) 105.
11. In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?
(A) 7 (B) 11 (C) 12 (D) 15 (E) 18.
12. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2010. Qual è il massimo grado che può avere il polinomio $p(x-1) - 3p(x) + 3p(x+1) - p(x+2)$?
(A) È sempre il polinomio nullo (B) 0 (C) 1 (D) 2007 (E) 2010

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Per rubare un prezioso gioiello, un ladro deve scoprire il codice che permette di aprire la porta della cassaforte. Le informazioni che è riuscito a carpire sono le seguenti:
- il codice è un numero
 - qualsiasi sottosequenza di cifre consecutive del codice (dunque sia ogni cifra presa singolarmente, che ogni coppia di cifre, etc. fino a tutto il numero) rappresenta un numero primo (ad esempio, 217 non va bene, perché 1 non è un primo e 21 non è un primo)
 - il codice è il numero più grande che abbia questa proprietà.
- Qual è il codice segreto per aprire la cassaforte?
14. Il monumento a Mathenkamen è a forma di piramide che poggia sulla sua base quadrata di lato 18 m. La sua altezza misura 15 m, e il piede dell'altezza cade nel centro del quadrato. La piramide è orientata in modo che, quando i raggi del sole arrivano da sud inclinati di 45° rispetto al suolo, l'area della parte di terreno su cui essa spande la sua ombra sia la più piccola possibile. Quanto vale quest'area espressa in m^2 ?
(Nota: il terreno coperto dalla base della piramide non va contato come terreno in ombra.)

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Trovare tutte le terne ordinate di numeri interi positivi (p, q, n) tali che p, q siano primi e $p^2 + q^2 = pqn + 1$.

SOLUZIONE

Nome: _____ Cognome: _____

16. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC . All'interno di tale triangolo sono dati un punto M , dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $\widehat{CMA} = 2\widehat{CBA}$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $\widehat{BNM} = \widehat{CBA}$.

- Dimostrare che $\widehat{CBN} = \widehat{BAM}$.
- Dimostrare che $CM + MN = BN$.

SOLUZIONE

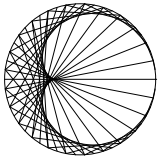
Nome: _____ Cognome: _____

17. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

In quanti modi diversi si possono mettere in fila i numeri $\{21, 31, 41, 51, 61, 71, 81\}$ in modo che, comunque se ne scelgano quattro in posti consecutivi, la loro somma sia divisibile per tre?

SOLUZIONE

Nome: _____ Cognome: _____



Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per gli scorsi anni, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE

Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.

Si ricorda che alle risposte esatte vanno attribuiti **5 punti**, alle risposte non date (bianche) va attribuito **1 punto**, alle risposte errate vanno attribuiti **0 punti**.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B	E	C	D	C	B	B	C	A	C	D	D	373	27

SECONDA PARTE

Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi tre problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 10.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 10 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 15

Ovviamente si assegnino 10 punti per la soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta. Per soluzioni parziali si seguano queste indicazioni:

- **3 punti** a chi afferma che $q^2 - 1$ multiplo di p o equivalenti o simmetriche;
- **2 punti** a chi deduce $p|q + 1 \vee p|q - 1$

A questo punto la soluzione si può articolare in due diversi modi; o si conclude con delle disuguaglianze, altrimenti si conclude impostando i vari sistemi dati dalle divisibilità.

(a) punteggi parziali per soluzione con il sistema:

- **1 punto** a chi scrive il sistema "generico" $p = aq + k$, $q = bp \pm h$, dove h, k possono essere solo ± 1
- **1 punto** a chi risolve il sistema $(h, k) = (1, 1)$
- **1 punto** a chi risolve il sistema $(h, k) = (1, -1)$ o $(h, k) = (-1, 1)$
- **2 punti** a chi risolve il sistema $(h, k) = (-1, -1)$

(b) punteggi parziali per soluzione con disuguaglianze:

- **2 punti** per chi deduce $p \leq q + 1$ **E** $q \leq p + 1$, **1 punto** se ce n'è solo una

Ovviamente il punteggio accumulato in (a) e quello accumulato in (b) non sono sommabili. Se il candidato non rientra in nessuno dei casi precedenti ma nonostante ciò scrive almeno una delle 2 soluzioni (verificandola), gli verrà assegnato **1 punto**.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 16

Come sempre, qualunque dimostrazione completa vale **10 punti**, anche se diversa da quella ufficiale (ad esempio, fatta usando la geometria analitica o la trigonometria); però l'impostazione di calcoli analitici o trigonometrici che non portino alla tesi né a nessuno dei passi intermedi sotto riportati vale **0 punti**. Chi dimostrasse correttamente la seconda parte (o qualche passo intermedio di essa) assumendo per vera la prima senza dimostrarla ha diritto ai punti che vale ciò che ha dimostrato.

Analogamente, vale **0 punti** l'osservazione di proprietà della configurazione che non servano alla dimostrazione, come ad esempio il fatto che il punto M si debba trovare sulla circonferenza passante per A, C e per il circocentro del triangolo ABC o la dimostrazione dell'esistenza di un punto N che soddisfi le ipotesi.

Infine, valgono **0 punti** le dimostrazioni riguardanti casi particolari come quello in cui ABC è equilatero o la scelta di specifici punti M e N , o casi degeneri come quello in cui ABC è rettangolo (peraltro esplicitamente esclusi dal testo).

La prima parte dell'esercizio vale **4 punti**. Punteggi parziali possono essere assegnati per l'ottenimento di alcune delle uguaglianze tra angoli necessarie per la dimostrazione.

La dimostrazione che MNP è isoscele vale **2 punti**.

La dimostrazione della similitudine dei triangoli BCP e ABN vale **1 punto**; la dimostrazione della loro congruenza **2 punti** (comprensivi del punto per la similitudine).

L'osservazione che giacché il triangolo MNP è isoscele vale anche $MN = MP$ può essere fatta indipendentemente dalle considerazioni sui triangoli BCP e ABN e vale **1 punto**.

Infine l'osservazione che allora la tesi equivale a dimostrare che $CP = AM$ e che questo è vero per la congruenza di BCP e ABN vale **1 punto**.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 17

Proponiamo una scala di punteggio in caso la soluzione del candidato segua le idee della soluzione proposta. Lasciamo al docente il compito di giudicare eventuali soluzioni sostanzialmente diverse da quella proposta, tenendo presente che una soluzione logicamente corretta e completamente giustificata vale in ogni caso 10 punti. Alcune delle affermazioni seguenti possono essere dimostrate indipendentemente dalle altre. I punteggi proposti si riferiscono a ciascuna singola parte e nel caso di soluzioni parziali dovranno essere cumulati per ottenere la valutazione finale.

Per chi segue una strada simile alla soluzione proposta, o svolge solo parzialmente l'esercizio si assegnino: **1 punto** per chi osserva che è sufficiente considerare i resti della divisione dei numeri per tre e non i numeri stessi (proprietà i)).

2 punti per chi dimostra che il resto della divisione per tre dei primi tre elementi di un'ordinamento *buono* è, nell'ordine, lo stesso degli ultimi tre (proprietà ii))

3 punti per chi dimostra che i primi tre elementi di un ordinamento *buono* devono essere necessariamente avere tre resti diversi se divisi per tre (proprietà iii))

3 punti per chi dimostra che il quarto elemento di un'ordinamento *buono* deve necessariamente essere un multiplo di tre. (proprietà iv))

1 punto per lo svolgimento corretto del calcolo finale.

1. La risposta è **(B)**. 16 coni stradali individuano 15 segmenti lunghi 10 metri, per un totale di 150 metri di linea, e per dipingerla è necessaria una volta e mezza la vernice rispetto ai 6 litri dei 100 metri, ossia 9 litri.
2. La risposta è **(E)**. L'area che stiamo cercando è uguale all'area del triangolo ABC al quale abbiamo sottratto i tre triangoli più piccoli che partono dai vertici di ABC . Questi triangoli sono anche essi equilateri (sono omomorfi ad ABC) e tutti congruenti. Notiamo inoltre che ABC e DEF sono congruenti. Consideriamo ad esempio il triangolino di vertice in A : la sua altezza è uguale alla distanza di A dal lato parallelo a BC del triangolo DEF . Per costruzione, AO è il doppio di questa distanza e, per proprietà della mediana di un triangolo, $AO = OD$ è $\frac{2}{3}$ dell'altezza del triangolo DEF (e quindi di ABC). Essendo il triangolino omomorfo ad ABC e con altezza $\frac{1}{3}$ di quella di ABC , la sua area sarà $\frac{1}{9}$ di quella di ABC . L'area dei tre triangolini sarà dunque $\frac{1}{3}$ di quella di ABC e l'area che stavamo cercando è $\frac{2}{3}$.

3. La risposta è **(C)**. Le quattro affermazioni sono equivalenti a:

- A: "C'è almeno un furfante tra noi."
 B: "Ci sono almeno due furfanti tra noi."
 C: "Ci sono almeno tre furfanti tra noi."
 D: "Ci sono almeno quattro furfanti tra noi."

Se ci sono x furfanti, tutte e sole le prime x affermazioni sono vere, dunque ci sono x cavalieri. Dato che furfanti e cavalieri sono nello stesso numero e in tutto devono essere quattro, avremo due cavalieri e due furfanti.

4. La risposta è **(D)**. Intuitivamente, le posizioni delle carte rimanenti sono equiprobabili, quindi è più probabile che il 7 di denari finisca a Duccio "perché ha più spazio libero". Più formalmente: contiamo i modi di distribuire 34 carte tra 4 persone, in modo che uno ne riceva 10, uno 9, uno 8 e uno 7: possiamo distribuire ordinatamente 34 carte in $34!$ modi diversi, ma ognuno di questi viene contato tante volte quante sono i possibili modi di ordinare separatamente 10, 9, 8 e 7 carte, cioè $10!9!8!7!$ (la formula è la stessa degli anagrammi con ripetizione). Quindi abbiamo $P = \frac{34!}{10!9!8!7!}$ casi possibili. Quante sono le configurazioni in cui Antonio ha il 7 di denari? Per un conto analogo a quello appena svolto, sono $P_A = \frac{33!}{10!9!8!6!}$. Quindi, semplificando più fattori possibili, si ha $\frac{P_A}{P} = \frac{7}{34}$ del totale dei casi possibili. Analogamente otteniamo $\frac{P_B}{P} = \frac{8}{34}$, $\frac{P_C}{P} = \frac{9}{34}$, $\frac{P_D}{P} = \frac{10}{34}$.

SECONDA SOLUZIONE

La probabilità è definita come casi favorevoli/casi possibili; qui considereremo "caso" un qualunque possibile ordinamento delle 40 carte. Contiamo i casi possibili, cioè i possibili modi di riordinare 40 carte in modo che le carte A, B, C siano in tre delle posizioni 1-10, le carte D, E siano in due delle posizioni 11-20, la carta F sia in una delle posizioni 21-30. Per fare questo, fissiamo innanzitutto le posizioni delle carte "obbligate": possiamo posizionare A, B, C in $10 \cdot 9 \cdot 8$ modi, D, E in $10 \cdot 9$ modi, F in 10 modi. Quindi abbiamo $103 \cdot 92 \cdot 8$ modi di fissare la posizione delle sei carte note. Le restanti carte possono andare nelle posizioni rimaste libere in un qualunque ordine, e questi ordinamenti sono $34!$ (difatti, ogni possibile ordinamento delle 40 carte che soddisfa i requisiti richiesti si ottiene in uno e un solo modo scegliendo la posizione delle 6 carte "obbligate" e l'ordine in cui compaiono negli spazi liberi le 34 carte "libere"). Quindi i casi possibili sono $P = 103 \cdot 92 \cdot 8 \cdot 34!$. Un calcolo analogo fornisce $F_A = 103 \cdot 92 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 33!$ per i casi in cui fissiamo il vincolo aggiuntivo che il 7 di denari sia nella mano di A, e allo stesso modo $F_B = 103 \cdot 92 \cdot 82 \cdot 33!$, $F_C = 103 \cdot 93 \cdot 8 \cdot 33!$, $F_D = 104 \cdot 92 \cdot 8 \cdot 33!$. Quindi le probabilità da confrontare sono $\frac{F_A}{P} = \frac{7}{34}$, $\frac{F_B}{P} = \frac{8}{34}$, $\frac{F_C}{P} = \frac{9}{34}$, $\frac{F_D}{P} = \frac{10}{34}$, e la maggiore è $\frac{F_D}{P}$.

5. La risposta è **(C)**. Sostituendo $m = n + 5$, l'espressione data diventa $\frac{3m - 15}{m}$, cioè $3 - \frac{15}{m}$. Affinché sia intera, quindi, m deve essere un divisore di 15, per cui le possibilità sono solo 1, 3, 5, 15 e i loro

opposti. Di queste, le uniche per cui l'espressione è un multiplo di 4 sono 1, -3, 5 e -15, per cui gli n cercati sono -20, -8, -4 e 0.

6. La risposta è **(B)**. Sviluppando sul piano la superficie laterale della montagna, tagliandola lungo il segmento DC . Si avrà un settore circolare di centro C , raggio 4 km, ossia la lunghezza di DC , e delimitato da un arco di circonferenza di 4π km, ossia la circonferenza di base della montagna originaria. Lo sviluppo sarà allora un semicerchio. In particolare il punto D si troverà ad uno degli estremi dell'arco di circonferenza che delimita il semicerchio e P a metà di quest'arco, perciò l'angolo \widehat{PCD} sarà retto. Inoltre $CD = 4$ km, la distanza tra C e la porta dell'Inferno è di 3 km, allora la distanza tra D e la porta dell'Inferno è di 5 km per il teorema di Pitagora.

7. La risposta è **(B)**. Si possono calcolare direttamente tutte le cifre del numero. Si ha $10^{16} + 1 = \frac{10^{32} - 1}{10^{16} - 1}$ (è il prodotto notevole $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$), e scomposizioni analoghe per gli altri termini. Quindi

$$\begin{aligned} & (10^{16} + 1)(10^8 + 1)(10^4 + 1)(10^2 + 1)(10 + 1) \\ &= \frac{10^{32} - 1}{10^{16} - 1} \frac{10^{16} - 1}{10^8 - 1} \frac{10^8 - 1}{10^4 - 1} \frac{10^4 - 1}{10^2 - 1} \frac{10^2 - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{10^{32} - 1}{9} = \frac{\overbrace{999 \dots 9}^{32 \text{ cifre}}}{9} = \frac{\overbrace{111 \dots 1}^{32 \text{ cifre}}}{1}. \end{aligned}$$

8. La risposta è **(C)**. Sia a la somma dei voti insufficienti, b la somma di quelli sufficienti, m il numero di insufficienze nella classe, n il numero di sufficienze nella classe. La media delle insufficienze è $\frac{a}{m}$ e quella delle sufficienze $\frac{b}{n}$. Possiamo considerare $a, b, m, n > 0$. Inoltre l'ipotesi ci assicura che a, b sono due numeri naturali.

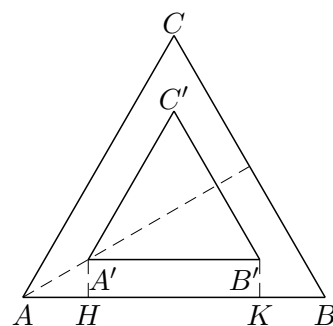
$$\frac{a}{m} = 4,6 = \frac{23}{5} \Rightarrow 23m = 5a; \quad \frac{b}{n} = 7,1 = \frac{71}{10} \Rightarrow 71n = 10b;$$

Dato che 5 non divide 23, m sarà multiplo di 5. Allo stesso modo n sarà multiplo di 10. Al minimo, $m = 5$ e $n = 10$, dunque un totale di 15 alunni. È facile verificare che ci possa essere una situazione del genere che rispetti le nostre ipotesi, ad esempio l'insieme di voti 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8.

9. La risposta è **(A)**. Detto ABC il triangolo che forma la base, la zona di sicurezza è un triangolo $A'B'C'$ (con A' appartenente alla bisettrice dell'angolo in A e cicliche) interno al triangolo ABC . Dette H e K le proiezioni di A' e B' rispettivamente sul lato AB , si ha $A'H = 1$ metro. Poiché il triangolo $A'AH$ è un mezzo triangolo equilatero (gli angoli in A, A' e H valgono rispettivamente 30, 60 e 90 gradi), il lato AH è lungo

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ da cui } A'B' = HK = AB - AH - BK = AB - 2 \cdot AH = 8 - 2 \cdot \sqrt{3} \text{ metri.}$$

$$(8 - 2 \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (64 + 12 - 32\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 19\sqrt{3} - 24, \text{ che è l'area cercata (in metri quadrati).}$$



10. La risposta è **(C)**. Innanzitutto, c'è almeno un numero a_k che non è divisibile per 2, altrimenti 2 divide $\text{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Vogliamo provare che a_k deve avere almeno due fattori primi distinti: difatti, se così non fosse, dovremmo avere $a_k = p^s$ per qualche primo p e naturale s . Ma in questo caso, per ogni altro numero $h = 1, 2, 3, 4, h \neq k$, si ha che $\text{mcd}(a_h, a_k)$ può essere solo un numero della forma p^r , con $1 < r \leq s$ (perché dev'essere un divisore di p^s , ed è maggiore di 1 per la prima ipotesi). Ma questo implicherebbe che tutti e quattro i numeri sono multipli di p , impossibile per la seconda ipotesi. Quindi c'è almeno un numero a_k che ha almeno due fattori primi diversi da due, e quindi vale almeno $3 \cdot 5 = 15$. D'altra parte, si verifica che la quaterna 6, 10, 12, 15 soddisfa tutte le ipotesi del problema, quindi 15 è veramente il minimo che cerchiamo.

11. La risposta è **(D)**. I multipli di 3 compresi tra 1 e 20 sono 6, dunque ci sono 14 numeri che non sono multipli di 3. Se estraessimo giusto quei 14 numeri, il loro prodotto non sarebbe un multiplo

di 3 e meno di 12, dunque il numero n di estrazioni minime per assicurarci che il prodotto sia un multiplo di 12 è maggiore di 14. Se estraiamo 15 numeri, invece, avremo sicuramente almeno un multiplo di 3. Dato che i numeri pari compresi tra 1 e 20 sono 10, e quelli dispari 10, con 15 estrazioni ci assicuriamo almeno 5 numeri pari. Dunque il prodotto sarà un multiplo di 3 e un multiplo di $2^5 = 32$. In particolare, sarà multiplo di 3 e di 4, e dunque di 12. Ne consegue che n è proprio 15.

12. La risposta è **(D)**. Notiamo innanzitutto che se $p(x)$ ha grado d , allora $p(x+1) - p(x)$ ha grado esattamente $d-1$. Per semplicità indichiamo genericamente con \star una somma di termini di grado inferiore a $d-1$. Ponendo $p(x) = ax^d + bx^{d+1} + \star$, si ha

$$\begin{aligned} p(x+1) - p(x) &= a(x+1)^d - ax^d + b(x+1)^{d-1} - bx^{d-1} + \star \\ &= (ax^d + adx^{d-1} + \star) - ax^d + (bx^{d-1} + \star) - bx^{d-1} + \star \\ &= adx^{d-1} + \star. \end{aligned}$$

Quindi $p(x+1) - p(x)$ ha grado esattamente $d-1$. Ora, indichiamo $r(x) := p(x+1) - p(x)$ e $s(x) := r(x+1) - r(x)$; si ha

$$\begin{aligned} s(x) &= (p(x+2) - p(x+1)) - (p(x+1) - p(x)) \\ &= p(x+2) - 2p(x+1) + p(x), \\ s(x) - s(x-1) &= (p(x+2) - 2p(x+1) + p(x)) - (p(x+1) - 2p(x) + p(x-1)) \\ &= p(x+2) - 3p(x+1) + 3p(x) - p(x-1). \end{aligned}$$

Applicando più volte il risultato sopra dimostrato, abbiamo allora che il grado di $r(x)$ è $2010-1=2009$, il grado di $s(x)$ è 2008 , il grado di $s(x) - s(x-1)$ è 2007 (per ottenere quest'ultima dobbiamo porre $y := x-1$ e applicare il risultato a $s(y+1) - s(y)$).

SECONDA SOLUZIONE

Per ogni numero intero positivo i , definisco il polinomio

$$\binom{x}{i} = \frac{x \cdot (x-1) \cdots (x-i+1)}{i!}$$

pongo $\binom{x}{0} = 1$ e $\binom{x}{i} = 0$ per ogni intero $i < 0$. I fatti che mi servono a proposito di questi polinomi sono due:

il primo è che, per i positivo, $\binom{x}{i}$ ha grado i , e, in particolare, il coefficiente di x^i in $\binom{x}{i}$ è $\frac{1}{i!}$ (basta osservare che il coefficiente della x in ciascuno degli i fattori di primo grado che compongono il numeratore è 1)

il secondo è l'equazione $\binom{x+1}{i+1} - \binom{x}{i+1} = \binom{x}{i}$, che vale per ogni intero i : per valori positivi di i si ha infatti

$$\begin{aligned} \binom{x+1}{i+1} - \binom{x}{i+1} &= \\ &= \frac{(x+1) \cdot x \cdots (x-i+1)}{(i+1)!} - \frac{x \cdots (x-i+1) \cdot (x-i)}{(i+1)!} \\ &= \frac{x+1}{i+1} \binom{x}{i} - \frac{x-i}{i+1} \binom{x}{i} = \binom{x}{i} \end{aligned}$$

per $i = 0$ l'equazione si riduce a $x+1 - x = 1$, e per $i < 0$ è conseguenza immediata della definizione.

Applicando questo secondo fatto, ottengo

$$\begin{aligned}
 \binom{x-1}{i} - 3\binom{x}{i} + 3\binom{x+1}{i} - \binom{x+2}{i} &= \\
 &= -\left(\binom{x}{i} - \binom{x-1}{i}\right) + 2\left(\binom{x+1}{i} - \binom{x}{i}\right) - \left(\binom{x+2}{i} - \binom{x+1}{i}\right) \\
 &= -\binom{x}{i-1} + 2\binom{x+1}{i-1} - \binom{x+2}{i-1} \\
 &= \left(\binom{x+1}{i-1} - \binom{x}{i-1}\right) - \left(\binom{x+2}{i-1} - \binom{x+1}{i-1}\right) \\
 &= \binom{x+1}{i-2} - \binom{x+2}{i-2} \\
 &= -\binom{x+2}{i-3}
 \end{aligned}$$

dove al primo e al terzo passaggio ho semplicemente riordinato la somma.

Considero, adesso, un polinomio $p(x)$ di grado d . Sostengo che esso può essere scritto nella forma

$$p(x) = a_d \binom{x}{d} + \dots + a_1 \binom{x}{1} + a_0$$

per una opportuna scelta di numeri reali a_0, \dots, a_d . Infatti, chiamando k il coefficiente di testa di $p(x)$ e ponendo $a_d = kd!$, ottengo che $p(x) - a_d \binom{x}{d}$ ha grado minore di d , poiché i monomi di grado d si cancellano. Ripetendo il procedimento su questo nuovo polinomio ottengo un a_{d-1} tale che il grado di $p(x) - a_d \binom{x}{d} - a_{d-1} \binom{x}{d-1}$ è minore di $d-1$. Seguitando ad abbassare il grado del polinomio arrivo al punto in cui $p(x) - a_d \binom{x}{d} - a_{d-1} \binom{x}{d-1} - \dots - a_1 \binom{x}{1}$ ha grado 0, ossia è una costante, e pongo a_0 uguale a tale costante.

Ora è facile calcolare il polinomio richiesto dal testo, raccogliendo i coefficienti a_i

$$\begin{aligned}
 p(x-1) - 3p(x) + 3p(x+1) - p(x+2) &= \\
 &= a_d \left(\binom{x-1}{d} - 3\binom{x}{d} + 3\binom{x+1}{d} - \binom{x+2}{d} \right) + \dots \\
 &= -a_d \binom{x+2}{d-3} - a_{d-1} \binom{x+2}{d-4} - \dots - a_3
 \end{aligned}$$

e questo è un polinomio di grado $d-3$, poiché il grado di $\binom{x+2}{d-3}$, come quello di $\binom{x}{d-3}$, è $d-3$, mentre il grado degli altri addendi è minore. La risposta corretta è pertanto 2007.

13. La risposta è 373.

Troviamo tutti i numeri che verificano le condizioni del testo.

Innanzitutto notiamo che se abbiamo trovato tutti i numeri accettabili di n cifre, allora un numero accettabile di $n+1$ cifre dovrà necessariamente contenere uno dei numeri di n cifre. In particolare, se scopriamo che non esiste un numero di k cifre, allora non esisterà nessun numero accettabile con più di k cifre.

I numeri accettabili di una cifra sono i primi di una cifra, cioè 2, 3, 5 e 7. Notiamo che però la cifra 2 e la cifra 5 possono stare solo all'inizio di un numero accettabile (altrimenti il numero avrebbe una sottosequenza divisibile rispettivamente per 2 o per 5).

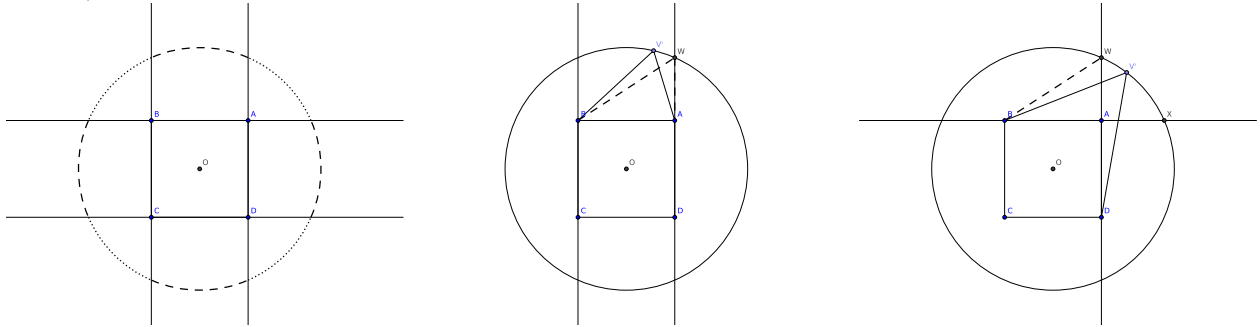
I numeri accettabili di due cifre sono quindi 23, 37, 53, 73.

Vediamo ora i numeri di 3 cifre. Nessuno può finire per 23 o per 53. Poi 237, 537, 273 e 573 non sono accettabili in quanto multipli di 3. Nessun numero può cominciare con la stessa coppia di cifre, altrimenti avrebbe una sottosequenza multipla di 11 (ad esempio in 773 la sottosequenza 77 è multiplo di 11). Restano da controllare 373 che risulta essere primo (e quindi accettabile) e 737

che è multiplo di 11.

Vediamo ora se ci possono essere numeri di 4 cifre. Dobbiamo controllarne solo 4: 2373, 3373, 5373 e 7373. Il primo ed il terzo contengono una sottosequenza multipla di 3. Il secondo contiene una sottosequenza multiplo di 11, e l'ultimo risulta multiplo di 101. Non esistono dunque numeri accettabili di 4 cifre e, per quanto detto all'inizio, non esisteranno numeri accettabili con più di 4 cifre. Il codice cercato è dunque 373.

14. La risposta è 27. Chiamiamo $ABCD$ la base della piramide e V il suo vertice lontano da terra. Si noti che l'ombra V' del punto V cade su una circonferenza di raggio 15 m centrata nel centro di $ABCD$, e a seconda dell'orientazione del sud rispetto alla piramide (che consideriamo fissa) può cadere su uno qualunque dei punti della circonferenza. L'ombra della piramide (inclusa questa volta l'area di terreno sotto la piramide stessa) è formata dall'unione dei quattro triangoli ABV' , BCV' , CDV' , DAV' .



Questa ombra può assumere due forme notevolmente diverse. Si faccia riferimento alle figure: quando V' cade in una delle parti di circonferenza tratteggiate nella figura in alto, l'ombra è un pentagono (figura a sinistra); quando V' cade invece in una delle altre parti, l'ombra è un quadrilatero (figura a destra). Si chiami W (risp. X) l'intersezione della semiretta DA (risp. BA) con la circonferenza. Vogliamo mostrare che in entrambe le configurazioni l'area dell'ombra è maggiore o uguale all'area del trapezio $WBCD$. Difatti, nella configurazione del disegno a sinistra, $S(\text{ombra}) = S(ABCD) + S(ABV')$, e $S(ABV') \geq S(ABW)$ perché si tratta di due triangoli con uguale base AB , e l'altezza di ABV' è maggiore di quella di ABW . Analogamente, nella configurazione del disegno a sinistra, $S(\text{ombra}) = S(BCD) + S(BDV')$, e $S(BDV') \geq S(BDW)$ perché si tratta di due triangoli con uguale base BD , e l'altezza di BDV' è maggiore di quella di BDW (per rendersene conto basta notare che WX è parallelo a BD). Quindi l'ombra di area minore si ha quando $V' = W$, o nelle configurazioni simmetriche sugli altri lati. Va quindi calcolata l'area del triangolo ABW . Detto M il punto medio di AD , abbiamo che $MW \perp OM$, $OW = 15$ m, $OM = 9$ m, da cui per il teorema di Pitagora $MW = \sqrt{OW^2 - OM^2} = 12$ m. Quindi $AW = MW - AM = 12 - 9 = 3$ m, e $S(ABW) = \frac{AB \cdot AW}{2} = \frac{18 \cdot 3}{2} = 27$ m².

15. Supponiamo $p = q$. Sostituendo otteniamo $p^2(2 - n) = 1$ che è impossibile perché 1 non è divisibile da nessun primo. Quindi necessariamente p e q sono diversi; poiché l'equazione è simmetrica in p e q possiamo supporre che $q > p$, cioè $q \geq p + 1$. Scriviamo ora la nostra equazione come:

$$p^2 - 1 = pqn - q^2 = q(pn - q).$$

Questo vuol dire che $p^2 - 1$ è multiplo di q e quindi q è un divisore primo di $p^2 - 1$. Quindi

$$q | p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1).$$

Ora, essendo q un numero primo, esso deve essere presente o nella fattorizzazione di $p - 1$ oppure in quella di $p + 1$; in entrambi i casi $q \leq p + 1$. Per ipotesi iniziale avevamo $q \geq p + 1$ e quindi ottengo che $q = p + 1$. Tra due numeri successivi uno necessariamente deve essere pari e dunque è 2 (l'unico primo pari) e l'altro è necessariamente 3 poiché 1 non è primo. Ora controlliamo che si possa risolvere l'equazione in n sostituendo $p = 2$ e $q = 3$:

$$4 + 9 = 6n + 1,$$

da cui $n = 2$. Le uniche due soluzioni sono dunque (2, 3, 2) e (3, 2, 2).

16. Sia P il punto di intersezione tra il prolungamento di CM e BN e sia R il punto di intersezione tra il prolungamento di AM e BC ; indichiamo inoltre con β l'angolo \widehat{CBA} .

Dimostrazione della prima parte

Diamo due dimostrazioni di questo punto.

Primo argomento

Per il teorema dell'angolo esterno applicato all'angolo in N del triangolo ABN , $\widehat{BAM} = \widehat{BAN} = \beta - \widehat{NBA}$. Ma $\widehat{CBN} + \widehat{NBA} = \widehat{CBA} = \beta$, quindi $\widehat{CBN} = \beta - \widehat{NBA} = \widehat{BAM}$.

Secondo argomento

Consideriamo i triangoli ABR e BNR : essi hanno l'angolo in R in comune e gli angoli corrispondenti \widehat{RBA} e \widehat{RNB} uguali a β per ipotesi, quindi sono simili. Ma allora anche $\widehat{RBN} = \widehat{RAB}$ e quindi $\widehat{CBN} = \widehat{RBN} = \widehat{RAB} = \widehat{BAM}$.

Dimostrazione della seconda parte

Consideriamo ora il triangolo MNP : l'angolo esterno in M è $\widehat{CMN} = \widehat{CMA}$ e vale perciò 2β . Ma per il teorema dell'angolo esterno allora $\widehat{MPN} = 2\beta - \widehat{PNM} = 2\beta - \beta = \beta$ (quindi MNP è isoscele).

Consideriamo infine i triangoli BCP e ABN : gli angoli corrispondenti in P ed in N sono complementari di angoli uguali per quanto appena dimostrato e sono quindi uguali, mentre gli angoli corrispondenti in B ed in A sono uguali per quanto visto nella prima parte. I due triangoli sono quindi simili, anzi congruenti in quanto il lato BC del primo è uguale al lato corrispondente AB del secondo (ABC è isoscele per ipotesi). Quindi anche $CP = BN$ in quanto sono anch'essi lati corrispondenti di questi due triangoli. Ma poiché MNP è isoscele, $CM + MN = CM + MP = CP$ e quindi $CM + MN = BN$, come volevasi dimostrare.

SECONDA SOLUZIONE

Denominato α l'angolo \widehat{ABC} , il luogo dei punti interni al triangolo ABC che vedono il segmento AC sotto un angolo pari a 2α è un arco di circonferenza Γ passante per il circocentro O di ABC ; il teorema dell'angolo al centro garantisce infatti che si abbia $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$. Poiché ABC è isoscele su base AC ed acutangolo, O si trova lungo l'asse del segmento AC internamente al triangolo, e i triangoli AOB , BOC , COA risultano isosceli. Detta J l'intersezione di Γ con CB e posto $\theta = \widehat{JAM}$, $\phi = \widehat{MAO}$ si ha:

$$\theta = \widehat{JCM} = \widehat{JAM} \text{ in quanto entrambi sottendono l'arco } JM \text{ in } \Gamma,$$

$\phi = \widehat{MCO} = \widehat{MAO}$ in quanto entrambi sottendono l'arco MO in Γ ,
ma chiaramente $\theta + \phi = \widehat{BCO} = \frac{\alpha}{2}$, alché:

$$\widehat{BNM} = \alpha \longrightarrow \widehat{BNA} = \widehat{COB} = \pi - \alpha,$$

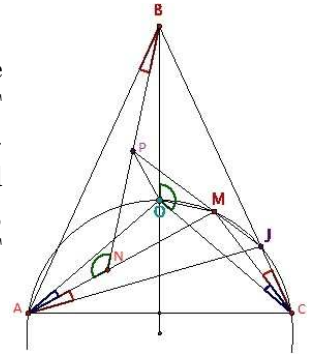
da cui segue $\widehat{ABN} = \theta$. Detta ρ una simmetria rispetto all'asse di AC seguita da una simmetria rispetto all'asse di BA , poniamo $P = \rho(M)$. Poiché le simmetrie preservano gli angoli, PB forma un angolo pari a θ con BA , il che garantisce che P giaccia su BN . La trasformazione ρ , in quanto composizione di simmetrie assiali, è una rotazione antioraria di centro O (intersezione dell'asse di CB e dell'asse di BA) di ampiezza pari a $\pi - \alpha = \widehat{COB}$, in particolare realizza $CM = BP$ e $OM = OP$. Si ha inoltre:

$$\widehat{OMA} = \widehat{OCA} = \widehat{AC}, \quad \widehat{OPN} = \pi - \widehat{OPB} = \pi - \widehat{OMC},$$

ma \widehat{OMA} ed \widehat{OAC} sottendono il medesimo arco CO in Γ da parti opposte rispetto al centro, dunque sommano ad un angolo piatto. Il triangolo MNP è conseguentemente isoscele per congruenza degli angoli che insistono su MP e si ha:

$$CM + MN = BP + MN = BP + PN = BN$$

come voluto.



17. La risposta è **144**.

Per brevità indicheremo con *buono* un modo di ordinare i numeri a_1, \dots, a_7 assegnati che soddisfi le caratteristiche richieste. Cerchiamo di stabilire alcune proprietà degli ordinamenti *buoni*.

i) perché un ordinamento sia *buono* non è importante quali siano i numeri scelti dall'insieme assegnato ma soltanto qual è il resto della loro divisione per 3.

ii) il resto di ciascuno degli elementi di un ordinamento *buono* (a_1, \dots, a_7) è determinato completamente una volta scelto quello dei primi quattro elementi.

Infatti dato che l'ordinamento è buono, sia $a_2 + \dots + a_5 = (a_1 + \dots + a_4) + (a_5 - a_1)$ che $a_2 + \dots + a_5$ e $a_1 + \dots + a_4$ sono divisibili per tre; inoltre, $a_2 + \dots + a_5 = (a_1 + \dots + a_4) + (a_5 - a_1)$ per cui anche $(a_5 - a_1)$ deve esserlo. Questo significa che a_5 ed a_1 se divisi per 3 danno lo stesso resto.

Analogamente possiamo dire la stessa cosa per le coppie a_2, a_6 e a_3, a_7 .

iii) Il resto della divisione per tre di un numero intero può essere soltanto 0, 1 o 2. Per brevità parleremo di numeri di tipo 0, 1 o 2 a seconda di quale delle tre possibilità si presenti.

La somma di quattro numeri è divisibile per tre soltanto se (a meno dell'ordine) i quattro numeri sono dei tipi seguenti:

$$0, 0, 0, 0 \quad \text{oppure} \quad 1, 2, 0, 0 \quad \text{oppure} \quad 1, 2, 1, 2.$$

Nell'insieme a nostra disposizione abbiamo però soltanto 3 numeri di tipo 0, (21,51,81), soltanto due (31,61) di tipo 1 e soltanto due (41,71) di tipo 2. Questo esclude la prima e la terza possibilità. Quest'ultima perché in base alla proprietà ii) dovremo necessariamente proseguire con altri elementi di tipo 1 o 2 che però non abbiamo a disposizione.

iv) non tutti gli ordinamenti di 1,2,0,0 sono possibili: ancora per la proprietà ii) non possono esserci due numeri di tipo "0" nei primi tre posti. Se così non fosse troveremo ancora due numeri di tipo "0" negli ultimi tre posti per un totale di quattro, ma ne abbiamo a disposizione soltanto tre.

Di conseguenza il numero al quarto posto deve essere per forza di tipo "0" e i tipi degli elementi a_1, a_2, a_3 devono essere identici a quelli degli elementi a_5, a_6, a_7 rispettivamente.

A questo punto siamo in grado di calcolare quanti sono gli ordinamenti *buoni*:

- l'elemento al quarto posto può essere scelto solo tra 21, 51, 81 ovvero in tre modi diversi;
- ai primi tre posti ci deve essere un numero di tipo 0, uno di tipo 1 e uno di tipo 2. I modi possibili di ordinare i tipi di numero sono 6.
- per ciascuno dei tipi dei primi tre elementi della sequenza è possibile scegliere tra due numeri diversi dell'insieme. Quindi per ciascuno dei modi di ordinare i tipi ci sono $2 \times 2 \times 2 = 8$ modi diversi di scegliere.
- una volta fatte le scelte ai punti precedenti, gli elementi agli ultimi tre posti sono univocamente determinati.

Riepilogando, il numero di ordinamenti *buoni* è:

$$3 \times 6 \times 8 = 144.$$