UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2011

GARA di SECONDO LIVELLO

29 febbraio 2012

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso:__________ Città:__________

e–mail:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Codice fiscale:__________ Nazionalità:__________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–14)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Sono dati due numeri reali a e b tali che $|3a - b + 1| = |b|$. Allora necessariamente si ha...
(A) $b = 0$ **(B)** $a = -\frac{1}{3}$ **(C)** $a < 0$ **(D)** $b = \frac{3a+1}{2}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

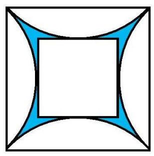
2. Marco, Fabrizio e Giovanni, tre matematici, sfidano un gruppo di quattro fisici a un torneo di calcio balilla (costituito da un certo numero di partite) in cui alla fine vince il gruppo che ha segnato il maggior numero di goal totali.
In ogni partita i fisici segnano 2 goal in più di quanti ne avevano segnati nella precedente, a partire da 1 goal nella prima. Sapendo che il totale dei goal segnati da fisici e matematici è 330 e che sono i matematici ad aggiudicarsi la vittoria nel torneo, determinare lo scarto minimo di goal che può essersi verificato.
(A) 1 goal **(B)** 2 goal **(C)** 24 goal **(D)** 42 goal **(E)** 48 goal.

3. Alice, Berto e Carlo devono seppellire un tesoro e decidono di seppellirlo in un punto equidistante da tutti e tre. Sapendo che si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo con un angolo di 30° e di perimetro 6 m, quale sarà la distanza del tesoro da ciascuno?
(A) 1 m **(B)** $\frac{3}{2}$ m **(C)** 2 m **(D)** $3 - \sqrt{3}$ m **(E)** 3 m.

4. Delle tre radici a, b, c del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$ sappiamo che $4a = 3(b + c)$. Quanto vale $a + bc$?
(A) $-\frac{5}{2}$ **(B)** $1 - \sqrt{3}$ **(C)** 0 **(D)** $\frac{7}{4}$ **(E)** $2 + \sqrt{5}$.

5. Una ed una sola delle seguenti affermazioni è falsa. Quale?
(A) "La **(B)** è falsa" **(B)** "La **(C)** è falsa" **(C)** "La **(E)** è vera" **(D)** "La **(A)** è vera"
(E) "Tre delle precedenti sono vere".

6. In un quadrato di lato 2 sono tracciati degli archi di circonferenza di uguale lunghezza tangenti tra loro nei loro punti d'intersezione, che sono i vertici del quadrato (come in figura). Internamente a questi viene costruito un altro quadrato con i lati paralleli a quelli del primo e tangenti ai quattro archi di circonferenza. Quanto vale l'area colorata?



(A) $\frac{\pi}{16}$ **(B)** $2(8\sqrt{2} - 8 - \pi)$ **(C)** $4 - \pi - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ **(D)** $2\pi - 4\sqrt{2} - \frac{1}{4}$
(E) non è univocamente determinata.

7. La quantità di inchiostro usato per comporre un testo per le Olimpiadi della Matematica segue una strana legge: negli anni dispari aumenta del 50% rispetto all'anno precedente, negli anni pari diminuisce di un sesto (sempre rispetto all'anno precedente). Tra quanti anni per la prima volta sarà *almeno* il triplo che nel 2012?
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9.

8. I numeri a, b sono interi positivi. Qual è il minimo valore di $a + b$ affinché $21ab^2$ e $15ab$ siano entrambi cubi perfetti?
(A) 160 **(B)** 260 **(C)** 360 **(D)** 460 **(E)** 560.

9. In un trapezio isoscele il punto d'incontro delle diagonali vede la base minore sotto un angolo di 150° e ciascuna diagonale è lunga 6 cm. Qual è l'area del trapezio?
(A) 9 cm^2 **(B)** 16 cm^2 **(C)** 24 cm^2 **(D)** i dati sono insufficienti **(E)** nessuna delle precedenti.

10. Per entrare nel castello di Burian bisogna usare una parola chiave che è costituita da almeno 6 caratteri; inoltre un carattere non si può mai ripetere due o più volte consecutivamente, e una coppia di caratteri consecutivi non può comparire in un altro punto della parola chiave. Sul tastierino funzionano ormai solo le lettere E, N e V: quante parole chiave diverse si possono tentare?
(A) 6 **(B)** 18 **(C)** 6^2 **(D)** 2^6 **(E)** infinite.

11. Un folletto vive nel mondo delle fate. Un certo giorno sceglie 12 coppie di numeri positivi: quelli della prima sono dispari, quelli della seconda danno resto 1 se divisi per 3, quelli della terza danno resto 1 se divisi per 4, e così via fino alla dodicesima. Poi calcola la differenza dei quadrati dei numeri di ciascuna coppia e scrive su una lavagna il prodotto di tutte le differenze ottenute.
Dalla mattina successiva, divide per 12 il numero sulla lavagna e, se il risultato è intero, scrive questo risultato al posto del numero che era sulla lavagna; se non è intero, cancella tutto e si trasferisce nel mondo degli umani a fare scherzetti. Per quanti giorni (escluso quello iniziale in cui il folletto sceglie i numeri) siamo sicuri che non avremo problemi nel nostro mondo?
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 12.

12. Maria ha tre monete rosse e una blu, tutte dello stesso raggio e con il bordo gommato. Mette sul tavolo le tre monete rosse ai vertici di un triangolo equilatero in modo che si tocchino a due a due, poi posa sul tavolo anche quella blu in modo che tocchi una delle monete rosse. Adesso, tenendo ferme le monete rosse, fa ruotare quella blu in modo che rimanga sempre aderente ad almeno una delle monete rosse e i bordi gommati non scivolino. Dopo un percorso completo attorno al gruppo delle tre monete rosse la moneta blu torna al punto di partenza; quanti giri ha fatto su se stessa?
(A) 3 **(B)** 1 **(C)** π **(D)** $\frac{3\pi}{4}$ **(E)** $\frac{9}{2}$.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. La differenza di due interi positivi a e b è un numero primo p e il loro prodotto è un quadrato perfetto non superiore a 10000. Qual è il massimo valore che può assumere p?

14. Siano ABC un triangolo acutangolo e H il piede dell'altezza relativa al vertice A. Coloriamo ogni punto P interno al triangolo in questo modo: di rosso, se il vertice più vicino a P è A; di verde, se il vertice più vicino a P è B; di blu, se il vertice più vicino a P è C. Sapendo che $AH = 35$, $BH = 21$ e $CH = 15$, quanto misura l'area formata dai punti rossi?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Martino pensa di avere scoperto un metodo per vincere alla roulette, o comunque per non perdere troppi soldi. Punta sempre sul rosso. Comincia puntando 1 euro; ogni volta che perde raddoppia la puntata precedente, mentre ogni volta che vince alla puntata successiva punta 1 euro. Un giorno ha con sé 31 euro e va a giocare stabilendo che andrà via appena o avrà perduto 5 volte di fila, o avrà vinto 5 volte di fila, oppure sarà rimasto senza soldi prima che si sia verificata una di queste due possibilità.

(a) Quale sarà il numero minimo di giocate che dovrà fare perché finisca di giocare con 31 euro, se esce con 5 sconfitte?

(b) Quale sarà il numero minimo di giocate che dovrà fare perché finisca di giocare con 31 euro, se esce con 5 vittorie?

(c) Se esce con 5 vittorie, quale sarà come minimo il suo capitale finale?

SOLUZIONE

Nome:________________ Cognome:________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Una successione $\{x_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ di numeri reali è definita, al variare del parametro reale a, come segue:

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{n+1} = 2 - x_n^2 \quad \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Trovare tutti i valori di a per cui x_n è costante (cioè vale $x_n = a$ per tutti gli n).

(b) Dimostrare che per uno dei valori trovati al punto (a) (che chiameremo y) si ha che, se $|a| < |y|$, $|x_n| < |y|$ per tutti gli n.

(c) Dimostrare che, se $|a| > |y|$, x_n è strettamente decrescente.

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

In un triangolo acutangolo ABC con $AB < AC$, la bisettrice che parte da A interseca il lato BC nel punto P. La parallela al lato AB passante per P interseca il lato AC nel punto Q; su questa retta sia R il punto che giace sulla semiretta uscente da Q che non contiene P e tale che $QR = QA$. Chiamiamo poi S la proiezione ortogonale di R su BC e T l'intersezione tra AC e la retta passante per P e perpendicolare ad AP.

(a) Dimostrare che il circocentro di APR è Q;

(b) Dimostrare che STC è simile ad APC.

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2011

GARA di SECONDO LIVELLO

29 febbraio 2012

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso:_____ Città:__________

e–mail:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Codice fiscale:__________ Nazionalità:__________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E	D	D	A	B	B	E	E	A	C	B	A	19	198

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–14)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Valutazione esercizio 15.
L'osservazione che dopo la prima vittoria in seguito ad una serie di sconfitte il capitale aumenta di 1 vale 2 punti se enunciata e non dimostrata, 5 punti se viene anche dimostrata.
Nel punto (a) provare che il numero minimo di giocate deve essere maggiore o uguale a 43 vale 3 punti, mostrare che tale minimo è realizzato vale 2 punti.
Il punto (b) vale 2 punti.
Il punto (c) vale 3 punti.

Valutazione esercizio 16.
I tre quesiti dell'esercizio valgono rispettivamente 4, 5 e 6 punti.
Come sempre, una dimostrazione completa di ciascuno dei tre quesiti, anche se non secondo la linea della dimostrazione qui presentata, vale l'intero punteggio del quesito dimostrato.
Osserviamo che per il secondo quesito non è necessario aver analizzato il caso $y = 1$ per avere il punteggio pieno.
Punteggi parziali suggeriti:

(a) per il primo quesito:

- 1 punto per l'elenco delle soluzioni, anche non motivato;
- 2 punti per aver impostato l'equazione di secondo grado ed averla correttamente risolta (1 punto se l'equazione è impostata, ma non risolta o risolta in modo errato). Questi 2 punti assorbono il punto del caso precedente;
- i restanti 2 punti per la verifica che i due valori producono effettivamente una successione costante, eventualmente graduati a seconda del grado di chiarezza della dimostrazione;
- è possibile anche dare una dimostrazione "grafica" sulla base del disegno della parabola $y = 2 - x^2$ e della retta $y = x$; se con questo argomento non si giunge all'equazione di secondo grado, ma si enuncia semplicemente il principio che i valori devono essere necessariamente 2, 1 punto;
- 2 punti per la dimostrazione che se $x_1 = x_0$, allora la successione è costante, anche se non sono stati trovati i valori per cui questo accade.

(b) per il secondo quesito:

- la sola asserzione (non dimostrata) che il valore -2 sdddisfa la condizione non dà punteggio;
- 2 punti per la prima disuguaglianza, cioè $x_n < 2$ per ogni n (la dimostrazione può ovviamente anche essere fatta per induzione, anche se non è necessaria);
- i restanti 3 punti sono per la dimostrazione della disuguaglianza $x_n > -2$ (ovviamente sotto l'ipotesi $|a| < 2$). 1 punto può essere attribuito ad ogni tentativo di mettere in piedi una dimostrazione per induzione di questo asserto (o di tutto il quesito), anche se mal realizzata.

(c) per il terzo quesito:

- 1 punto, come nel quesito precedente, per tentativi di dimostrazione per induzione, anche se non andati a buon fine;
- 1 ulteriore punto per la dimostrazione che nelle ipotesi del quesito $x_1 < x_0$ (trattando correttamente il segno di x_0);
- 1 punto per la risoluzione corretta della disuguaglianza $2 - x^2 < x$;
- 3 punti per una dimostrazione che, per ogni n, $|x_n| > 2$ e che (quindi) $x_n < x_{n-1}$, anche se non formalizzata come dimostrazione per induzione e quindi in particolare mancante del passo base (questi punti non si sommano al punto precedente, ma possono sommarsi al punto per $x_1 < x_0$);
- non più di 4 punti per una dimostrazione formalizzata per induzione dell'asserto sulla base della risoluzione della disuguaglianza $2 - x^2 < x$, mancante della verifica che la successione rimane sempre nell'insieme dove la disuguaglianza è verificata (ad esempio, come detto, perché $|x_2| < 2$ per ogni n).

- non più di 2 punti per una dimostrazione non formalizzata per induzione sulla base della risoluzione della disuguaglianza $2 - x^2 < x$, mancante della verifica che la successione rimane sempre nell'insieme dove la disuguaglianza è verificata (del tipo "$2 - x^2 < x$ se $|x| > 2$, quindi il valore diminuisce sempre").

Valutazione esercizio 17.
I due quesiti dell'esercizio valgono rispettivamente 6 e 9 punti.
Come sempre, una dimostrazione completa di un quesito, anche se non secondo la linea della dimostrazione qui presentata, vale l'intero punteggio del quesito dimostrato.
Osserviamo che il Lemma 1 può essere dimostrato nel corso della soluzione del primo o del secondo quesito; in entrambi i casi, la sua dimostrazione corretta (ovviamente, anche se non enunciato come lemma a sé stante) vale 4 punti (che, nel caso fosse utilizzato in ambedue i quesiti, vengono contati due volte). Enunciarlo senza dimostrazione, invece, non dà punteggio (salvo quanto detto esplicitamente più sotto).
Punteggi parziali suggeriti:

(a) per il primo quesito:

- la sola osservazione senza dimostrazione che PAQ è isoscele non dà punteggio;
- 2 punti per la dimostrazione dell'uguaglianza degli angoli $B\widehat{A}P$ e $A\widehat{P}Q$, anche se non seguita dal resto della dimostrazione;
- 4 punti per la dimostrazione (comunque data) del fatto che Q è punto medio di PR, anche se il solutore non si è accorto che questo implica la tesi (questi punti non si cumulano con i precedenti);
- 4 punti per il Lemma 1, comunque sia stato (correttamente) dimostrato, se fatto rientrare in una soluzione, anche non completa, di questo quesito (questi punti non si cumulano con i precedenti);
- per le dimostrazioni che usano il Lemma 1, rimane da dimostrare che in un triangolo rettangolo l'intersezione dell'ipotenusa con l'asse di uno qualunque dei cateti è il punto medio dell'ipotenusa stessa (che in un triangolo rettangolo è il circocentro): i restanti 2 punti sono attribuiti a seconda della chiarezza con cui viene enunciato e dimostrato questo fatto, ma il solo enunciarlo non dà più di 1 punto;
- 3 punti per aver enunciato il Lemma 1 ed aver completato la dimostrazione del quesito, senza però essere stati in grado di dimostrare il Lemma stesso;
- nessun punto per dimostrazioni non complete in coordinate.

(b) per il secondo quesito, se si usa il Lemma 1 si effettua una suddivisione $4 + 2 + 3$:

- 4 punti per il Lemma 1 comunque (correttamente) dimostrato, se fatto rientrare in una soluzione, anche non completa, di questo quesito;
- 2 punti per la dimostrazione che $APSR$ è ciclico con il Lemma 1;
- 3 punti per la dimostrazione che $APTR$ è ciclico e che questo implica la tesi; all'interno di questi 3 punti, come punteggi parziali si possono assegnare 1 punto per la dimostrazione che PT è parallela ad AR e un punto ulteriore per la dimostrazione che PQT è isoscele;

altrimenti si effettua una suddivisione $4 + 4 + 1$:

- 4 punti per la dimostrazione che $APSR$ è ciclico;
- 4 punti per la dimostrazione che $APTR$ è ciclico;
- 1 punto per la dimostrazione della tesi usando la ciclicità di $APSR$ e $APTR$.

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. La risposta è **(E)**. Infatti, nel piano cartesiano aventi assi a e b, la regione descritta dall'equazione $|3a - b + 1| = |b|$ è data dal'unione della retta $3a + 1 = 0$ e dalla retta $3a - 2b + 1 = 0$. Quindi nessuna delle prime quattro risposte proposte è corretta.

2. La risposta è **(D)**. I gol segnati dai fisici nelle prime n partite sono pari alla somma dei primi n numeri dispari, cioè sono n^2. Poiché i matematici hanno vinto, essi hanno segnato più di $330/2 = 165$ goal, quindi i fisici hanno segnato meno di 165 goal. Il più grande quadrato perfetto minore di 165 è $144 = 12^2$, che rappresenta il massimo numero di goal che possono aver segnato i fisici. Quindi i matematici hanno segnato almeno $330 - 144 = 186$ goal e lo scarto minimo è quindi $186 - 144 = 42$, che può essersi realizzato se ad esempio i matematici hanno segnato 15 goal in 6 delle 12 partite e 16 goal nelle restanti 6.

3. La risposta è **(D)**. Il tesoro è sepolto nel circocentro O del triangolo ai vertici del quale si trovano Alice, Berto e Carlo. Poiché tale triangolo è rettangolo, O è il punto medio dell'ipotenusa. Detta x la sua lunghezza espressa in metri, si ha $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{3} = 6$, da cui $\frac{3+\sqrt{3}}{2}x = 6$ e $x = 2(3 - \sqrt{3})$. Quindi la distanza dal tesoro di ciascuno è $3 - \sqrt{3}$.

4. La risposta è **(A)**. Si ha $a + b + c = \frac{7}{2}$ e $abc = -6$. Quindi $4a + 4b + 4c = 14$ e, coi dati del testo, $3(b + c) + 4b + 4c = 14$, da cui $b + c = 2$. Quindi $a = \frac{3}{2}$ e $bc = -4$, quindi $a + bc = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$.

5. La risposta è **(B)**. Se supponiamo che la frase "La **(B)** è falsa" sia falsa, allora anche la **(D)** è falsa, contro l'ipotesi del problema. Quindi la frase "La **(B)** è falsa" è vera, quindi l'affermazione falsa è la **(B)** e tutte le altre risultano vere.

6. La risposta è **(B)**. I quattro archi sono quarti di arco di una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$, quindi la distanza fra il punto medio di ciascun arco e il lato del quadrato che ha per estremi gli estremi dell'arco stesso è $\sqrt{2}-1$. Il lato del quadrato interno è quindi $2-2(\sqrt{2}-1) = 4-2\sqrt{2}$ e la sua area è $(4-2\sqrt{2})^2 = 8(3-2\sqrt{2})$. L'area racchiusa nei quattro segmenti circolari è $\pi(\sqrt{2})^2 - 2^2 = 2(\pi - 2)$. Togliendo queste due aree dall'area del quadrato di lato 2, si ottiene l'area colorata, che vale quindi $4 - 8(3 - 2\sqrt{2}) - 2(\pi - 2) = 4 - 24 + 16\sqrt{2} - 2\pi + 4 = 16\sqrt{2} - 16 - 2\pi = 2(8\sqrt{2} - 8 - \pi)$.

7. La risposta è **(E)**. Certamente la quantità di inchiostro supererà il triplo del 2012 per la prima volta in un anno dispari, giacché negli anni pari diminuisce. Se sono passati $2k + 1$ anni, quindi, essa sarà diventata
$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}\right)^k.$$
Imponendo che questa quantità sia maggiore di 3, dopo qualche semplice passaggio ci troviamo a dover trovare il minimo k per cui
$$\left(\frac{5}{4}\right)^k > 2;$$
ma per $k = 3$ si ottiene $\frac{125}{64} < \frac{128}{64} = 2$, mentre per $k = 4$ si trova $\frac{625}{256}$ che è chiaramente maggiore di 2. Ci troveremo allora nel $2 \cdot 4 + 1$-esimo anno, cioè il nono.

8. La risposta è **(E)**. I più piccoli cubi perfetti della forma $21ab^2$ e $15ab$ sono tali per cui a e b possono contenere solo i fattori 3, 5 e 7 (quelli contenuti in 15 o in 21). Poniamo $a = 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n$ e $b = 3^p \cdot 5^q \cdot 7^r$ (con esponenti interi non negativi), quindi $21ab^2 = 3^{l+2p+1} \cdot 5^{m+2q} \cdot 7^{n+2r+1}$ e $15ab = 3^{l+p+1} \cdot 5^{m+q+1} \cdot 7^{n+r}$. Tutti gli esponenti debbono essere multipli di 3, e, per ottenere il più piccolo valore di $a + b$, debbono essere i più piccoli possibile. Quindi si hanno i seguenti sistemi $\begin{cases} l + 2p + 1 = 3k_1 \\ l + p + 1 = 3h_1 \end{cases}$; $\begin{cases} m + 2q = 3k_2 \\ m + q + 1 = 3h_2 \end{cases}$; $\begin{cases} n + 2r + 1 = 3k_3 \\ n + r = 3h_3 \end{cases}$. Le più piccole soluzioni intere non negative sono $p = 0$, $l = 2$, $m = 1$, $q = 1$, $n = 1$, $r = 2$, quindi $a = 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 315$, $b = 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 245$ e $a + b = 560$.

9. La risposta è **(A)**. Indichiamo con A, B, C, D i vertici del trapezio, con O il punto d'incontro delle diagonali, con H e K i piedi delle perpendicolari ad AC condotte, rispettivamente, da B e D. L'area S del trapezio $ABCD$ è pari alla somma delle aree dei triangoli ACB e ACD, che hanno la stessa base AC e altezze BH e CK rispettivamente. Osserviamo poi che, poiché $A\widehat{O}B = D\widehat{O}C = 30°$, $BH = BO/2$ e $DK = OD/2$, quindi $BH + DK = (BO + OD)/2 = 3$ cm. Quindi $S = \dfrac{AC \cdot BH + AC \cdot DK}{2} = \dfrac{AC \cdot (BH + DK)}{2} = \dfrac{6\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm}}{2} = 9\,\text{cm}^2$.

10. La risposta è **(C)**. Consideriamo i primi due caratteri della parola chiave: poiché essi devono essere diversi, abbiamo $3 \cdot 2 = 6$ possibilità di sceglierli. Senza perdere generalità, supponiamo che essi siano NE. Possiamo a questo punto fare una semplice analisi per casi, scoprendo che se il terzo carattere è V si presentano 4 possibilità di cui 2 raggiungono anche i 7 caratteri di lunghezza ($NEVENV$, $NEVENVN$, $NEVNVE$, $NEVNVEN$); peraltro, nessuna di queste ammette una prosecuzione ulteriore valida. Se il terzo carattere è N, invece, le possibilità sono solo 2, una da 6 caratteri e una da 7 ($NENVEV$ e $NENVEVN$); infatti esistono alcune sequenze iniziali valide che non possono essere proseguite neanche fino a raggiungere i 6 caratteri, come ad esempio $NENVN$.

    A questo punto per ciascuna delle 6 possibilità per la coppia iniziale ne abbiamo 6 (e sempre diverse tra i vari insiemi da 6, perché appunto la coppia iniziale le distingue) e quindi in tutto le parole chiave possibili sono $6 \cdot 6 = 6^2$.

11. La risposta è **(B)**. La differenza dei quadrati di due numeri che danno lo stesso resto se divisi per k è un multiplo di k: infatti se i due numeri sono $a = nk + r$ e $b = mk + r$,

    $$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (n - m)k(nk + mk + 2r)$$

    (nel nostro caso abbiamo $r = 1$ per tutti i k da 2 a 13).

    Di conseguenza il prodotto scritto dal folletto sulla lavagna è sicuramente divisibile per $13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, che è un multiplo di 12^5; quindi sicuramente il folletto potrà dividere per 12 almeno per 5 giorni di fila trovando sempre un risultato intero. Ma se il folletto scegliesse ad esempio le coppie $(2k+1, k+1)$ per $k = 4, 7, 10, 13$ e le coppie $(k+1, 1)$ per i k restanti, le differenze dei quadrati (rispettivamente $3k^2 + 2k$ e $k^2 + 2k = k(k + 2)$) conterrebbero in tutto esattamente 5 fattori 3, perciò il loro prodotto risulterebbe divisibile per 12 non più di 5 volte. Ma allora in quel caso il sesto giorno la divisione produrrebbe un numero non intero; quindi possiamo contare su 5 giorni, ma non di più.

12. La risposta è **(A)**. Visto che dobbiamo fare un percorso completo, possiamo supporre di cominciare in un punto in cui la moneta blu tocca 2 monete rosse contemporaneamente. Nel tragitto che ora la moneta blu fa aderendo a una delle due il suo centro percorre una semicirconferenza; ma il bordo nel frattempo compie a sua volta una rotazione di 180° attorno al centro, quindi la moneta compie un giro completo. Poiché questo si ripete 3 volte, in tutto la moneta fa 3 giri su se stessa che terminano esattamente quando ha finito il percorso tornando al punto di partenza.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. La risposta è 19. Infatti, supponiamo senza perdita di generalità che sia $a > b$; allora $a = b + p$ e $ab = b(b + p)$.

    Se ora p dividesse b potremmo porre $b = pb'$ e avremmo che

    $$ab = pb'(pb' + p) = p^2b'(b' + 1)$$

    sarebbe un quadrato perfetto; ma poiché b' e $b' + 1$ sono primi fra loro, questo significherebbe che sia b', sia $b' + 1$ sarebbero quadrati perfetti, il che è impossibile (l'unico caso in cui ciò si verifica negli interi, cioè quando $b' = 0$, è escluso dall'ipotesi che b sia positivo).

    Perciò a e b devono essere primi fra loro, e quindi entrambi quadrati perfetti; possiamo quindi porre $a = n^2$, $b = m^2$ con n, m a loro volta positivi. Ma dal fatto che

    $$p = a - b = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$$

è un numero primo si ricava che uno tra $n - m$ ed $n + m$ (e si tratterà evidentemente di $n - m$) deve essere 1. Quindi $n = m + 1$, a e b sono due quadrati consecutivi e la somma $n + m$ delle loro radici quadrate deve essere il numero primo p.

Poiché però per ipotesi $ab \leq 10000$, $a \leq 100$ e quindi $n \leq 10$, $m \leq 9$ e perciò $p = n + m \leq 19$; e proprio il caso $a = 100, b = 81, n = 10, m = 9, p = 19$ risulta ricadere nelle ipotesi del quesito, quindi 19 è il massimo primo possibile.

14. La risposta è 198. Indichiamo con L, M, N i punti medi dei lati AB, BC, CA, e con O il circocentro di ABC (punto di incontro degli assi dei lati del triangolo). Per una nota proprietà dell'asse di un segmento, l'insieme dei punti rossi è il quadrilatero $ALON$, di cui bisogna quindi determinare l'area.
Si ha $LN = BM = MC = (BH + HC)/2 = (21 + 15)/2 = 18$. Dalla proprietà del circocentro si ha $OA^2 = OC^2$; detto K il piede della perpendicolare condotta da O su AH, col teorema di Pitagora, si ha $OK^2 + KA^2 = OM^2 + BM^2$. Posto $KA = x$, e osservando che $OM = AH - KA = 35 - x$ si ottiene l'equazione $3^2 + x^2 = (35 - x)^2 + 18^2$, da cui $9 + x^2 = 1225 + x^2 - 70x + 324$, cioè $70x = 1540$ e infine $x = 22$. Poiché $ALON$ può essere decomposto in due triangoli aventi la stessa base LN e somma delle altezze pari a KA, l'area richiesta sarà $18 \times 22/2 = 198$.

Problemi dimostrativi – 15 punti

15. Cominciamo dimostrando un risultato preliminare: ogni volta che vince dopo una sequenza di sconfitte (ammesso che non si fermi prima), Martino si ritrova con 1 euro in più rispetto a quanto aveva prima di iniziare a perdere, cioè dopo la vittoria precedente. Questo perché se ha in mano n euro e gioca vincendo al k-simo tentativo ($k \geq 1$) avrà in mano

$$n - \sum_{i=1}^{k-1} 2^i + 2^k = n - (2^k - 1) + 2^k = n + 1$$

monete.
Detto in altro modo, se all'inizio di una sequenza di sconfitte (quindi all'inizio del gioco o dopo una vittoria) ha k euro e vince al primo colpo avrà $k + 1$ euro; ma anche se vince dopo avere perso una volta avrà $k - 1 + 2 = k + 1$ euro, e così via (ad esempio perdendo 3 volte, avrà perso $1 + 2 + 4 = 7$ euro, ma alla puntata successiva ne punta 8 e se vince avrà di nuovo $k - 1 - 2 - 4 + 8 = k + 1$ euro). Dopo una vittoria, quindi, Martino avrà sempre esattamente un euro in più che dopo la vittoria precedente, come volevamo dimostrare.
Fatta questa osservazione possiamo affrontare i tre punti del problema.

(a) Se Martino finisce di giocare avendo perso 5 volte di fila, vuol dire che ha perso 31 euro e quindi prima di perdere la prima volta di queste 5 doveva avere 62 euro. Questo, grazie all'osservazione precedente, implica che, prima dell'ultima serie di 5 sconfitte, Martino ha vinto almeno 31 volte e non ha mai né vinto né perso più di quattro giocate consecutive (altrimenti avrebbe smesso di giocare prima). Allora ha perso almeno $[\frac{31}{4}] = 7$ volte ed il numero di giocate è quindi almeno $31 + 7 + 5 = 43$.
Mostriamo come sia effettivamente possibile giocare 43 volte e uscire con 31 euro dopo 5 sconfitte: scrivendo V e S per vittoria e sconfitta, con la sequenza

$$VVVVS\ VVVVS\ VVVVS\ VVVVS\ VVVVS\ VVVVS\ VVVVS\ VVVSS\ SSS$$

si realizza esattamente la situazione richiesta (un capitale di 31 euro in uscita). Il capitale di Martino infatti ha questo andamento:

31 32 33 34 35 34 36 37 38 39 38 40 41 42 43 42 44 45 46 47 46 48 49 50 51 50

52 53 54 55 54 56 57 58 59 58 60 61 62 61 59 55 47 31.

(b) La situazione descritta non può verificarsi. Infatti il ragionamento che abbiamo visto si applica in particolare alla prima giocata e ci permette di dedurre che dopo una vittoria Martino ha sempre almeno 32 euro, quindi non è possibile che esca con 5 vittorie e solo 31 euro in mano.

(c) Quindi, tenuto conto dell'osservazione iniziale, se Martino esce con 5 vittorie non può avere mai meno di 36 euro; d'altra parte, se vince le prime 5 puntate esce esattamente con 36 euro.

16. (a) Se x_n deve essere costante, in particolare deve valere che

$$x_1 = x_0 = a.$$

Ma allora

$$a = x_1 = 2 - x_0^2 = 2 - a^2,$$

quindi a deve soddisfare l'equazione

$$a^2 + a - 2 = 0$$

che ha come soluzioni $a = -2$ e $a = 1$. Nessun altro valore può rendere la successione costante (ma a priori ancora non sappiamo se questi vanno bene).

Verifichiamo che effettivamente entrambi questi valori generano una successione costante: visto che la successione è definita per ricorrenza, a questo punto sarà anche

$$x_2 = 2 - x_1^2 = 2 - a^2 = a$$

e, allo stesso modo, $x_3 = a$ e così via (abbiamo in effetti dato una dimostrazione per induzione, anche se così immediata da non avere bisogno della consueta formalizzazione).

Perciò i valori richiesti sono proprio -2 e 1.

(b) Dimostriamo che questo è vero se $y = -2$. Innanzitutto, osserviamo che poiché il quadrato di un numero reale non può mai essere negativo, sarà $x_n \leq 2$ per ogni $n \geq 1$; quindi, a parte la possibile eccezione di $x_0 = a$, tutti i valori della successione sono più piccoli di 2.

Supponendo ora che sia

$$|a| < |y| = |-2| = 2,$$

dimostriamo per induzione su n che

$$|x_n| < 2 \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Il passo base è proprio l'ipotesi ($|x_0| = |a| < 2$).

Supponendo vera la disuguaglianza per x_{n-1}, dimostriamo ora che essa vale anche per x_n. Infatti se $|x_{n-1}| < 2$, evidentemente $x_{n-1}^2 < 4$; ma

$$x_n = 2 - x_{n-1}^2$$

e perciò

$$-2 = 2 - 4 < 2 - x_{n-1}^2 = x_n < 2,$$

cioè $|x_n| < 2$, il che completa la dimostrazione del passo induttivo.

Incidentalmente osserviamo che la proprietà non vale invece per l'altro valore del punto a), 1: infatti ad esempio se $a = 0$ si ha che $|a| < 1$, ma $|x_1| = |2 - a^2| = 2 > 1$. Si può anche dimostrare che in realtà -2 è l'unico numero reale che ha la proprietà indicata nel quesito.

(c) Supponiamo ora che $|a| > 2$; sarà più comodo dimostrare per induzione su n la proprietà seguente, più forte della nostra tesi:

"per ogni $n \geq 0$, $|x_n| > 2$ e $x_{n+1} < x_n$".

Per dimostrare il passo base dobbiamo mostrare che le disuguaglianze valgono nel caso $n = 0$. Osserviamo che la prima disuguaglianza è proprio la nostra ipotesi, quindi certamente vale; per la seconda, invece, poniamo $c_0 = |a| - 2 > 0$. Allora $|a| = 2 + c_0$ e

$$x_1 = 2 - a^2 = 2 - (2 + c_0)^2 = -2 - 2c_0 - c_0^2 < -(2 + c_0) = -|a| \leq a = x_0,$$

così il passo base è dimostrato.

La dimostrazione del passo induttivo è del tutto analoga. Per ogni $n \geq 1$ supponiamo che le disuguaglianze siano rispettate per $n-1$; allora possiamo porre $c_{n-1} = |x_{n-1}| - 2 > 0$ e ricavare come sopra

$$x_n = 2 - x_{n-1}^2 = -2 - 2c_{n-1} - c_{n-1}^2 < -(2 + c_{n-1}) = -|x_{n-1}|$$

(il che dimostra in particolare che $x_n < 0$ non appena $n \geq 1$).
Allora da un lato per tutti gli $n \geq 1$

$$|x_n| = -x_n > |x_{n-1}| > 2,$$

cioè la prima disuguaglianza da dimostrare;
dall'altro lato per $n \geq 2$ (quando cioè sappiamo che $x_{n-1} < 0$)

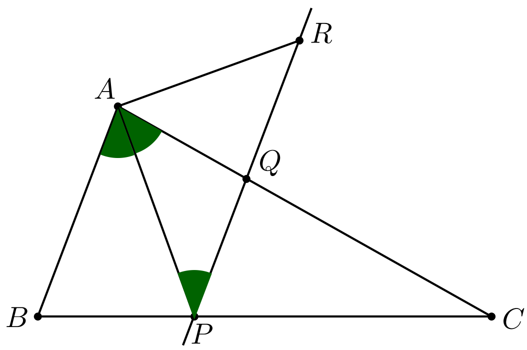
$$x_n < -|x_{n-1}| = x_{n-1},$$

mentre per $n = 1$ comunque (come abbiamo visto)

$$x_n < -|x_{n-1}| \leq x_{n-1},$$

quindi anche la seconda disuguaglianza è verificata anche per n; e per induzione a questo punto le disuguaglianze valgono per tutti gli $n \geq 0$, cioè la proprietà è vera.
Ma come abbiamo detto la proprietà è più forte della nostra tesi, che quindi è anch'essa dimostrata.

17. (a) Dimostriamo che non solo il triangolo QAR è isoscele di base AR per costruzione, ma anche il triangolo PAQ lo è (con base AP).



Infatti

$$B\widehat{A}P = P\widehat{A}Q$$

perché AP è bisettrice, mentre

$$B\widehat{A}P = A\widehat{P}Q$$

perché angoli alterni interni rispetto alla trasversale AP che taglia le parallele BA e PQ. Quindi anche

$$P\widehat{A}Q = A\widehat{P}Q,$$

cioè, per l'appunto, il triangolo PAQ è isoscele. Ma i due triangoli isosceli QAR e PAQ hanno il lato AQ in comune, quindi

$$QP = QA = QR$$

il che vuol dire che Q è il circocentro del triangolo APR, come richiesto.

(b) Innanzitutto dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 1. *Il triangolo APR è rettangolo in A.*

Dimostrazione.

Calcoliamo le ampiezze degli angoli $P\widehat{A}Q$ e $Q\widehat{A}R$:

$$P\widehat{A}Q = \frac{180^0 - P\widehat{Q}A}{2}$$

$$Q\widehat{A}R = \frac{180^0 - A\widehat{Q}R}{2}$$

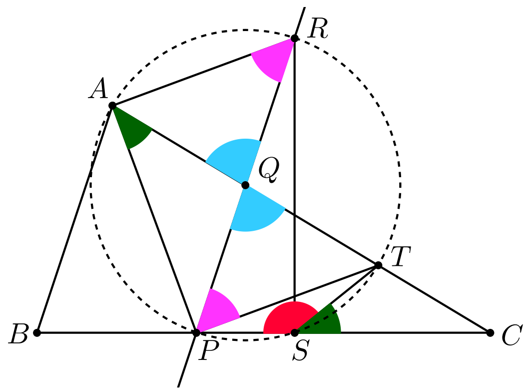
ma allora

$$P\widehat{A}R = P\widehat{A}Q + Q\widehat{A}R = \frac{180^0 - P\widehat{Q}A}{2} + \frac{180^0 - A\widehat{Q}R}{2} = \frac{360^0 - (P\widehat{Q}A + A\widehat{Q}R)}{2} = 90^0$$

perché $P\widehat{Q}A$ e $A\widehat{Q}R$ sono supplementari (insieme costituiscono l'angolo piatto $P\widehat{Q}R$).

A questo punto è facile vedere che i punti P, A, R, T, S sono su una stessa circonferenza di centro Q. In effetti, di P, A ed R lo sappiamo già dal punto precedente; ed inoltre

- S appartiene alla stessa circonferenza perché S e A vedono sotto un angolo retto lo stesso segmento PR (quindi $APSR$ è un quadrilatero ciclico);



- anche T appartiene a quella circonferenza, perché la sua distanza dal centro Q, cioè la lunghezza del segmento QT, è pari alla lunghezza di QP, che è un raggio della circonferenza: infatti giacché PT è parallela ad AR,

$$Q\widehat{P}T = Q\widehat{R}A;$$

ma d'altra parte,

$$R\widehat{Q}A = P\widehat{Q}T$$

perché angoli opposti al vertice Q, dunque il triangolo PQT è simile (di fatto, congruente) al triangolo RQA che è isoscele di base AR ed è quindi anch'esso isoscele di base PT.

Ma allora $APST$ è a sua volta un quadrilatero ciclico, quindi

$$P\widehat{A}T = 180^0 - P\widehat{S}T = T\widehat{S}C$$

da cui si ricava che appunto i triangoli APC ed STC sono simili, avendo un angolo in comune e due angoli corrispondenti uguali (e cioè quelli in A e in S rispettivamente).