Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

21 febbraio 2013

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________ Genere: F M

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso:_____ Città:__________

Email:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Ringraziamenti

La realizzazione di questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che ci hanno proposto problemi, li hanno risolti e valutati, ne hanno proposto modifiche:
Alberto Saracco, Alessandro Iraci, Andrea Bianchi, Angela Veronese, Carmelo Di Stefano, Cecilia Balocchi, Cristoforo Caffi, Davide Lombardo, Fabio Lilliu, Federico Poloni, Fedor Getman, Giovanni Paolini, Jacopo Notarstefano, Ludovico Pernazza, Maria Colombo, Nirvana Coppola, Paolo Leonetti, Paolo Menegatti, Roberta Maccheroni, Samuele Mongodi, Shuyi Yang, Simone Di Marino, Valentino Liu.
Grazie anche a Michele Barsanti per il supporto e la disponibilità.

Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Matteo deve fare un test a crocette con 11 domande. Ciascuna domanda ha una sola risposta giusta. La prima domanda ha 2 possibili risposte (A e B), la seconda domanda ha 3 possibili risposte (A, B, C), e così via, fino all'undicesima domanda che ha 12 possibili risposte. Qual è la probabilità che facendo a caso il test Matteo dia almeno una risposta giusta?

   (A) $\frac{1}{12!}$ **(B)** $\frac{1}{144}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{11}{12}$ **(E)** $\frac{121}{144}$

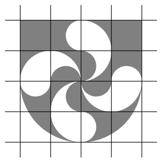
2. Nell'isola dei Cavalieri (che dicono sempre la verità) e dei Furfanti (che mentono sempre) viene effettuato un sondaggio fra i 2013 abitanti, in cui ci sono tre domande: "Tifi per la squadra A?", "Tifi per la squadra B?" e "Tifi per la squadra C?". Sappiamo che ogni isolano risponde a tutte e tre le domande e tifa per una e una sola delle tre squadre. Se le risposte "Sì" sono in totale 3000, quanti degli isolani sono Cavalieri?

   (A) 987 **(B)** 1023 **(C)** 1026 **(D)** 2013 **(E)** Non si può determinare con i dati forniti.

3. Sui vertici di un poligono con $n \geq 3$ lati sono scritti dei numeri interi, in modo tale che il numero scritto su ciascun vertice abbia la stessa parità della somma dei numeri scritti sui due vertici adiacenti (cioè se il numero sul vertice è pari, anche la somma dei numeri che compaiono sui vertici adiacenti è pari, mentre se il numero è dispari anche la somma è dispari). Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

   (A) Ci sono più numeri pari che dispari. **(B)** Ci sono più numeri dispari che pari. **(C)** Il numero di vertici su cui è scritto un numero dispari è pari. **(D)** n è multiplo di 3. **(E)** Nessuna delle precedenti.

4. Ker disegna lo stemma della sua città, Mathlandia, su un foglio a quadretti con quadretti di lato 1 ottenendo la figura a fianco. Sapendo che i tratti curvi sono tutti formati da semicirconferenze, quanto misura l'area colorata di grigio?

   (A) 12π **(B)** $8\pi + 2$ **(C)** 12 **(D)** 8 **(E)** Nessuna delle precedenti.

5. Sia x il numero di zeri con cui termina 2000! quando è scritto in base 5, e y il numero di zeri con cui termina 2013! quando è scritto in base 10. Calcolare $x - y$. (Ricordiamo che il numero $n!$, per n intero positivo, è il prodotto di tutti gli interi positivi minori o uguali a n.)

   (A) -2 **(B)** 0 **(C)** 2013 **(D)** 13! **(E)** Nessuna delle precedenti.

6. Siano x e y numeri reali tali che si abbia $x^2 + 4y^2 = 1$; quanto vale come minimo $|x| + 2|y|$?

   (A) $\frac{1}{2}$ **(B)** 1 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** 2

7. Sia $ABCD$ un quadrato all'interno del quale vengono tracciati due segmenti che dividono l'angolo in A in tre angoli uguali e il quadrato in due triangoli uguali e un quadrilatero. Qual è il rapporto tra l'area del quadrilatero e quella di uno dei due triangoli?

   (A) $\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(B)** $2\sqrt{3} - 1$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 2 **(E)** $2\sqrt{3} - 2$

8. Quante sono le coppie ordinate (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che l'intersezione tra A e B abbia esattamente un elemento?

   (A) 80 **(B)** 280 **(C)** 1280 **(D)** 751 **(E)** 405

9. Sapendo che il polinomio p è tale che, per ogni intero n, $p(5^n - 1) = 5^{5n} - 1$, quanto varrà $p(3)$?

   (A) 1023 **(B)** 999 **(C)** 874 **(D)** 242 **(E)** 0

10. Abbiamo un quadrilatero i cui lati misurano, nell'ordine, 1,7,5,5. Quanto vale al massimo la sua area?

    (A) 12 **(B)** $6\sqrt{6}$ **(C)** 16 **(D)** 20 **(E)** Un siffatto quadrilatero non esiste.

11. Agnese e Bruno sfidano Viviana e Zenone a biliardino; le squadre sono molto equilibrate, per cui per ogni pallina giocata entrambe le squadre hanno probabilità $1/2$ di segnare un gol. Qual è la probabilità che si arrivi a 5 pari?

(A) $\frac{1}{512}$ **(B)** $\frac{252}{1024}$ **(C)** $\frac{252}{512}$ **(D)** $\frac{169}{512}$ **(E)** $\frac{169}{1024}$

12. Quante sono le coppie di interi ordinate (x, y) tali che $xy = 4(y^2 + x)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 7 **(E)** 14

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. In una variante del gioco della battaglia navale Anna posiziona una portaerei (che possiamo pensare come rettangolino 5×1) in una griglia 10×10, indifferentemente in verticale o in orizzontale, senza farla vedere a Jacopo. Jacopo prova a colpire la portaerei, dicendole volta per volta le coordinate di un quadretto all'interno della griglia. Se il quadretto che ha scelto è tra quelli coperti dalla portaerei, questa è colpita, altrimenti è mancata. Quanti colpi deve sparare come minimo Jacopo per colpirla sicuramente almeno una volta?

14. Anacleto ha appena finito di mangiare una tavoletta di cioccolato, e inizia a giocare con la carta in cui era avvolto, un rettangolo di lati 360 mm e 300 mm. Decide di far una sola piega rettilinea in modo che, una volta piegata la carta, un vertice del rettangolo si trovi esattamente a metà del lato corto di cui non è estremo. Quanti millimetri risulta essere lunga la piegatura?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Determinare tutte le terne di interi strettamente positivi (a, b, c) tali che

- $a \leq b \leq c$;
- $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$;
- a è divisore di $b + c$, b è divisore di $c + a$ e c è divisore di $a + b$.

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia n un intero positivo. Una pulce si trova sulla retta reale ed effettua una sequenza di n salti di lunghezza 1,2,3,...,n. La pulce può scegliere l'ordine delle lunghezze dei salti e per ogni salto può decidere se saltare verso destra o sinistra.

(a) Dimostrare che per $n = 2012$ la pulce può terminare la sequenza di salti nello stesso punto da cui era partita.

(b) Dimostrare che per $n = 2013$ ciò non è possibile.

(c) In generale per quali n può ritornare al punto di partenza?

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un trapezio che non sia un parallelogramma. Siano P il punto d'incontro delle diagonali e Q il punto di intersezione dei prolungamenti dei lati obliqui.

(a) Si tracci la parallela alle basi passante per il punto P e siano X e Y i punti di incontro di essa con i lati obliqui: si dimostri che $XP = YP$.

(b) Si dimostri che la retta PQ interseca la base minore nel suo punto medio.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

Soluzioni dei quesiti

1. La risposta è **(D)**. Calcoliamo infatti la probabilità p che Matteo sbagli tutte le risposte (la probabilità richiesta è allora $1-p$): per la prima domanda c'è una risposta *sbagliata* su due risposte totali, quindi Matteo ha probabilità $1/2$ di sbagliare. Per la seconda domanda le opzioni non corrette sono due su tre, quindi Matteo ha probabilità $2/3$ di sbagliare. Analogamente, per la domanda numero j, ci sono j opzioni sbagliate su un totale di $j+1$, quindi compilando il test a caso Matteo ha probabilità $\dfrac{j}{j+1}$ di sbagliare. La probabilità di sbagliare tutte le risposte è il prodotto delle probabilità di sbagliare ognuna delle risposte, quindi

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{11}{12}$$

Osservando che ogni denominatore si cancella con il numeratore della frazione successiva si ottiene immediatamente $p = \dfrac{1}{12}$, quindi la probabilità cercata vale $1-p = \dfrac{11}{12}$.

2. La risposta è **(C)**. Sia C il numero dei cavalieri e F il numero dei furfanti. Chiaramente, ogni cavaliere intervistato risponderà esattamente una volta "Sì" (alla domanda relativa alla squadra per la quale tifa) e due volte "No", mentre un furfante risponderà esattamente un "No" e due "Sì".

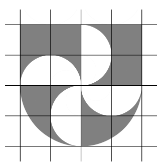
   Le informazioni fornite dal problema sono il numero totale di abitanti dell'isola, $C+F$, e il numero totale di risposte Sì, ovvero, per quanto appena osservato, $C+2F$. Si ha allora il sistema lineare

$$\begin{cases} C + F = 2013 \\ C + 2F = 3000 \end{cases}$$

   e sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda si ottiene $F = 987$, da cui $C = 2013 - 987 = 1026$.

3. La risposta è **(C)**. Osserviamo infatti che ogni vertice su cui è scritto un numero dispari ha esattamente un vicino contrassegnato con un numero dispari, dunque i dispari si presentano in coppie (ed il loro numero totale è quindi pari, eventualmente zero).

4. La risposta è **(D)**. Immaginando di spostare i quattro piccoli semicerchi ombreggiati di diametro 1 in modo da sovrapporli ai 4 semicerchi bianchi dello stesso diametro. Si ottiene in questo modo una figura in cui l'area ombreggiata è la stessa di quella dello stemma originario, rappresentata qui a fianco. Vediamo un rettangolo 2×4 accostato a un semicerchio di raggio 2, che costituiscono un'area di $8 + 2\pi$, al cui interno si trovano 4 semicerchi bianchi di raggio 1, i quali coprono un'area di 2π. L'area grigia totale è quindi $8 + 2\pi - 2\pi = 8$.



5. La risposta è **(A)**. Sappiamo che y è il massimo esponente tale che 10^y divida $2013!$. Dunque y è il minimo tra il numero di fattori 2 e fattori 5 che intervengono nella fattorizzazione di $2013!$. Siccome il numero di fattori due è chiaramente più grande del numero dei fattori 5, y è anche il numero di fattori 5 nella fattorizzazione di $2013!$.

   Similmente, il numero di zeri con cui termina $2000!$ scritto in base 5 è semplicemente il numero di fattori 5 che compaiono nella fattorizzazione di $2000!$.

   Scriviamo allora $2000! = 5^x \cdot a, 2013! = 5^y \cdot b$ per due interi a, b nella cui fattorizzazione non compaiono fattori 5.

   Osserviamo ora che $\dfrac{2013!}{2000!} = 5^{y-x} \cdot \dfrac{a}{b}$ è intero, perché coincide con $2001 \cdot 2002 \cdot \dots \cdot 2013$.

   Ne segue che $\frac{a}{b}$ è un intero senza fattori cinque, e che $y-x$ è il numero di fattori 5 nella fattorizzazione di $2001 \cdot 2002 \cdot \dots \cdot 2013$. Quest'ultima quantità è facile da calcolare: gli unici multipli di 5 in questo prodotto sono $2005, 2010$, ed entrambi contribuiscono per esattamente un fattore cinque (non essendo divisibili per 25), dunque $y - x = 2$.

6. La risposta è **(B)**. La quantità $|x| + 2|y|$ è infatti non negativa e il suo quadrato vale $x^2 + 4y^2 + 4|x||y| \geq x^2 + 4y^2 = 1$, quindi anche $|x| + 2|y| \geq 1$. Questo valore effettivamente si può ottenere (esattamente quando $|x||y| = 0$, cioè se $x = \pm 1, y = 0$ o $x = 0, y = \pm\frac{1}{2}$), ed è quindi il minimo possibile.

7. La risposta è **(E)**. Siano AT e AS i due segmenti tracciati, con T sul lato BC, S sul lato CD; l'angolo in A è retto e lo abbiamo diviso in tre angoli uguali, dunque $B\widehat{A}T = S\widehat{A}D = 30°$. I triangoli rettangoli ABT e ASD sono perciò due metà di un triangolo equilatero la cui altezza è il lato del quadrato. Chiamando l la lunghezza di AB, l'area del quadrilatero rimanente vale dunque per differenza $l^2 - \frac{1}{2}l\frac{2}{\sqrt{3}}l = l^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. L'area di ABT vale invece $\frac{1}{2\sqrt{3}}l^2$ (la metà di quella del triangolo equilatero). Il loro rapporto è $2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2(\sqrt{3} - 1)$.

8. La risposta è **(E)**. Le coppie richieste si possono costruire nella maniera seguente: scegliamo innanzitutto l'elemento comune tra A e B (cinque possibilità), e per ogni elemento non appartenente all'intersezione decidiamo se esso stia in A, in B o in nessuno dei due. Questo ci porta a dover compiere una scelta tra 3 possibilità per ognuno degli altri 4 elementi, dunque abbiamo in totale 3^4 possibilità (una volta fissata l'intersezione). Siccome ogni coppia con la proprietà richiesta si ottiene in questo modo per esattamente una scelta dell'elemento intersezione e per esattamente una scelta di come distribuire gli elementi restanti, il numero di coppie è $5 \cdot 3^4 = 405$.

9. La risposta è **(A)**. Consideriamo il polinomio $q(x) = (x + 1)^5 - 1$. Per ogni intero n abbiamo $q(5^n - 1) = (5^n - 1 + 1)^5 - 1 = 5^{5n} - 1 = p(5^n - 1)$, quindi il polinomio differenza $p(x) - q(x)$ si annulla per infiniti valori di x (tutti quelli della forma $5^n - 1$ con n intero). Ne segue che la differenza $p(x) - q(x)$ è identicamente nulla, cioè che $p(x) = q(x)$, per cui $p(3) = q(3) = 4^5 - 1 = 1023$.

10. La risposta è **(C)**. Sia $ABCD$ un quadrilatero, e supponiamo che la lunghezza di AB sia 1, quella di BC 7, e che $CD = AD = 5$. Si considerino il triangolo ABC e in triangolo CDA; Siano AH l'altezza di ABC relativa a BC, AK l'altezza di CDA relativa a CD. Abbiamo $AH \leq AB$ (si osservi il triangolo rettangolo ABH di cui AB è ipotenusa), e similmente $AK \geq AD$.

    Per il teorema di Tolomeo si ha $\frac{1}{2}(BC \cdot AH + CD \cdot AK) \leq \frac{1}{2}(BC \cdot AB + CD \cdot AD) = \frac{1}{2}(7 + 25) = 16$.

    D'altra parte esiste un quadrilatero che soddisfi le richieste che si ottiene facendo combaciare le ipotenuse di due triangoli rettangoli, uno con cateti di lunghezza 1 e 7, l'altro con entrambi i cateti di lunghezza 5: questo perché l'ipotenusa del primo ha lunghezza $\sqrt{1 + 7^2} = \sqrt{50}$, e quella del secondo lunghezza $\sqrt{5^2 + 5^2}$, cioè nuovamente $\sqrt{50}$. Vi è perciò un quadrilatero $ABCD$ come descritto sopra, in cui gli angoli in B e in D sono retti, la cui area vale esattamente 16. In alternativa si può osservare che se consideriamo i triangoli costituiti da lati adiacenti e dalla diagonale, essi sono di area massima quando sono retti. Ma se prendiamo il triangolo retto di cateti 1 e 7 e quello di cateti 5 e 5, essi hanno l'ipotenusa di medesima lunghezza, quindi possiamo incollarli lungo la diagonale per ottenere il quadrilatero di area massima, pari a $7/2 + 25/2 = 16$.

11. La risposta è **(B)**. Rappresentiamo una partita come una sequenza di 10 lettere (ognuna scelta tra 'A' e 'B'), in modo che la prima lettera sia 'A' se il primo gol è stato segnato dalla prima squadra e 'B' se è stato segnato dalla seconda, similmente la seconda lettera sia 'A' se il secondo gol è stato segnato dalla prima squadra e 'B' altrimenti, e così via per le altre.

    Per esempio, una partita in cui la prima squadra segna i primi 4 gol e poi il settimo (e nessun altro) sarà rappresentata da AAAABBABBB. Ora, una partita conduce ad un pareggio 5 a 5 se e soltanto se nella sequenza di lettere corrispondente compaiono esattamente 5 'A' e 5 'B', cioè se tale sequenza è un anagramma di 'AAAAABBBBB'.

    Inoltre, il fatto che le squadre siano perfettamente equilibrate si traduce nel fatto che tutte le sequenze di dieci lettere abbiano la stessa probabilità.

    Dal momento che gli anagrammi di 'AAAAABBBBB' sono $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ e il numero di sequenze di 10 lettere ('A' o 'B') è $2^10 = 1024$, la probabilità cercata è $\frac{252}{1024}$.

12. La risposta è **(E)**. Riscriviamo l'espressione come $xy - 4x = 4y^2$, ovvero $x(y-4) = 4y^2$. $y = 4$ non è soluzione, dunque possiamo dividere per $y - 4$ e ottenere l'equazione

$$x = \frac{4y^2}{y-4}.$$

Osservando che $y^2 = (y+4)(y-4)+16$ possiamo ulteriormente riscrivere l'equazione nella forma

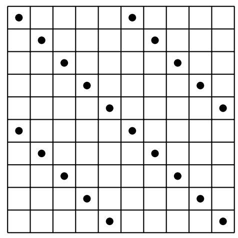
$$x = 4(y+4) + \frac{64}{y-4},$$

dunque le soluzioni dell'equazione originale corrispondono ai valori interi di y per cui $\frac{64}{y-4}$ è un intero (infatti, per tali valori di y esiste un'unica scelta di x, data dall'espressione precedente, che fornisce una soluzione dell'equazione originale).

Ne segue che le soluzioni cercate sono tante quanti i divisori (positivi e negativi) di 64: questi sono tutti della forma $\pm 2^i$ con $i = 0, 1, \ldots, 6$, dunque sono esattamente $2 \cdot 7 = 14$.

13. La risposta è **20**. 20 colpi sono necessari: se Jacopo spara 19 colpi o meno, allora esiste almeno una riga o almeno una colonna bersagliata da un solo colpo. Tale colpo divide quella riga (o colonna) in due spazi, uno dei quali dev'essere lungo almeno 5 quadretti, e dunque potrebbe nascondere la portaerei.

D'altra parte, 20 colpi sono sufficienti perché Jacopo sia certo di colpire la portaerei. Potrebbe ad esempio spararli come in figura, ovvero 10 colpi sulla diagonale principale della griglia, e gli altri così distribuiti: sul sesto quadretto della prima riga, sul settimo della seconda, e così via fino al decimo quadretto della quinta riga; sul primo della sesta, sul secondo della settima, e così via fino al quinto quadretto della decima riga.



14. La risposta è **325**. Sia $ABCD$ il rettangolo che costituisce la carta del cioccolato; supponiamo che AB sia lungo 360 mm e che Anacleto faccia combaciare il punto A con il punto medio del lato BC, che chiameremo M. Per fare ciò deve piegare lungo l'asse del segmento AM, che interseca i lati AB e CD rispettivamente nei punti S e T; ciò che il problema richiede è la lunghezza del segmento ST. Sia K l'intersezione fra ST e AM, H la proiezione di T su AB. Il triangolo THS è simile al triangolo ABM: entrambi sono rettangoli, e l'angolo TSA è congruente all'angolo AMB (questo perché è supplementare all'angolo TSB, il quale a sua volta, affinché la somma degli angoli interni di $SBMK$ sia 360°, poiché SBM e MKS sono retti, dev'essere supplementare ad AMB). Abbiamo dunque la similitudine $TH : TS = AB : AM$. La lunghezza di AB è 360 mm, quella di TH (uguale a quella di AD) è 300 mm, quella di AM risulta, per il teorema di Pitagora, valere (in millimetri) $\sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{360^2 + 150^2} = 30\sqrt{144 + 25} = 30 \cdot 13$.

Otteniamo dunque la lunghezza in millimetri di TS: $TS = \dfrac{AM \cdot TH}{AB} = \dfrac{30 \cdot 13 \cdot 300}{360} = 325$.

15. Le uniche terne di soluzioni sono $(1,1,1), (1,1,2)$ e $(1,2,3)$.

Dimostriamo innanzitutto che a, b, c sono a due a due coprimi (mostriamo solo che $\mathrm{MCD}(a,b) = 1$; per le altre coppie la dimostrazione è la stessa).

Se d è il massimo comun divisore tra a e b, allora d divide a, che a sua volta divide $b + c$, quindi d divide $b + c$; ma d divide b, quindi divide anche $b + c - b = c$.

Allora d è contemporaneamente un divisore di a, b e di c, e dunque $d = 1$, dal momento che $\mathrm{MCD}(a,b,c) = 1$ per ipotesi.

Notiamo ora che a divide $b+c$ per ipotesi, quindi a divide anche la somma $(b+c)+a$; similmente otteniamo che anche b e c dividono $a+b+c$.

Siccome a, b, c sono a due a due coprimi, il fatto che ognuno di essi divida la somma $a+b+c$ implica che anche il prodotto abc divide $a+b+c$.

Tutti i divisori di un numero naturale sono minori o uguali al numero stesso, quindi una condizione necessaria perché questo possa accadere è che $abc \leq a+b+c$.

Sfruttando l'ipotesi $a \leq b \leq c$ otteniamo la disuguaglianza

$$abc \leq a+b+c \leq 3c \Rightarrow ab \leq 3\,;$$

dobbiamo quindi considerare (dal momento che a, b sono interi positivi) i seguenti tre casi:

- $a = b = 1$. Allora c è un divisore di $a + b = 2$, e troviamo le prime due candidate terne di soluzioni: $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ e $(a, b, c) = (1, 1, 2)$. Entrambe soddisfano tutte le condizioni imposte dal problema, e sono dunque in effetti soluzioni.
- $a = 1, b = 2$. Allora c è un divisore di $a + b = 3$ maggiore o uguale a $b = 2$, dunque si ha necessariamente $c = 3$ e troviamo l'ultima candidata terna di soluzioni $(a, b, c) = (1, 2, 3)$. In effetti 1 è divisore di $2 + 3 = 5$, 2 è divisore di $1 + 3 = 4$ e 3 è divisore di $1 + 2 = 3$, dunque la terna è una soluzione.
- $a = 1, b = 3$. Allora c è un divisore di $a + b = 4$ maggiore o uguale a $b = 3$, dunque necessariamente $c = 4$; ma dovremmo avere anche b divisore di $a + c$, cioè 3 divisore di $4 + 1 = 5$, il che è falso. Dunque la terna $(1, 3, 4)$ *non* è soluzione.

Seconda soluzione

Per ipotesi $a + b$ è un multiplo di c, ed è minore o uguale a $2c$ (dal momento che $a \leq c, b \leq c$). Distinguiamo quindi i casi $a + b = 2c$ e $a + b = c$.

- Nel primo caso $2c = a + b \leq c + c = 2c$, quindi affinché si abbia l'uguaglianza si deve avere $a = b = c$. Per ipotesi a, b, c hanno massimo comun divisore 1, dunque l'unica possibilità è $a = b = c = 1$.
- Nel secondo caso, sostituendo b con $c - a$ nell'ipotesi otteniamo che a divide $b + c = 2c - a$ e che $b = c - a$ divide $a + c$.

  La prima divisibilità implica che $2c = ka$ per un certo intero k, e siccome $c \geq a$ sappiamo che $k \geq 2$. Inoltre, siccome $c-a$ divide $c+a$, allora divide anche $(c+a)+(c-a) = 2c = ka$. Questo vuol dire che la quantità

  $$\frac{ka}{c-a} = \frac{2ka}{2c-2a} = \frac{2ka}{ka-2a} = \frac{2k}{k-2} = \frac{2k-4+4}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}$$

  è un intero, dunque $k - 2$ divide 4. Sappiamo che $k \geq 2$, quindi $k - 2$ è un divisore non negativo di 4, e cioè è necessariamente uno tra $1, 2, 4$.

  Queste possibilità corrispondono a $k = 3, 4, 6$, ovvero a $c = \dfrac{3a}{2}, c = 2a, c = 3a$ e $b = c - a = \frac{a}{2}, b = a, b = 2a$.

  La prima possibilità è esclusa dall'ipotesi che b sia maggiore o uguale ad a, mentre negli altri due casi troviamo le terne di soluzioni $(a, b, c) = (a, a, 2a)$ e $(a, 2a, 3a)$.

  Dall'ipotesi che il massimo comun divisore tra a, b, c sia esattamente 1 segue che bisogna prendere $a = 1$, quindi le uniche terne di soluzioni di questa forma sono $(1, 1, 2)$ e $(1, 2, 3)$.

16. (a) Siccome 2012 è multiplo di 4, possiamo considerare le quadruple di numeri consecutivi $(k, k + 1, k + 2, k + 3)$ ed osservare che è possibile tornare ogni quattro passi al punto di partenza, poiché basta saltare prima a destra di k, poi a sinistra di $k + 1$, ancora a sinistra di $k + 2$ ed infine a destra di $k + 3$:

$$k - (k + 1) - (k + 2) + k + 3 = 0.$$

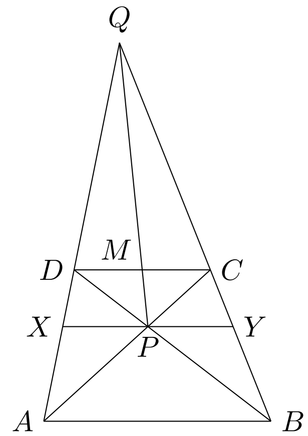
Ovviamente si possono invertire i salti a destra e a sinistra e permutarne l'ordine.

(b) Se consideriamo i numeri da 1 a 2013 abbiamo che, indipendentemente dal segno che mettiamo davanti a ciascun numero, la somma sarà dispari, dal momento che ci sono 1007 addendi dispari e quindi non potrà essere 0.

(c) Si ha che è possibile ritornare al punto di partenza per tutti i numeri che hanno resto 0 o 3 nella divisione per 4. Per i multipli di 4 si può utilizzare lo stesso ragionamento usato per 2012. Per i numeri che appartengono alla classe di resto 3 modulo 4 osserviamo che con i primi 3 salti la pulce può tornare nell'origine: $1 + 2 - 3 = 0$, dopodiché rimangono un numero di salti che è multiplo di 4, quindi si possono raggruppare come mostrato per il caso $n = 2012$. Alternativamente ci si può ricondurre al caso precedente introducendo un salto virtuale di lunghezza 0 e raccogliendo a 4 a 4.

Per n che dà resto 1 o 2 nella divisione per 4 non è possibile tornare al punto di partenza. Infatti comunque venga scelta la direzione dei salti, cioè i segni, avremo una somma con un numero dispari di addendi dispari, quindi dispari anch'essa ed, in particolare, diversa da 0.

17. (a) Supponiamo che CD sia la base minore del trapezio, che X sia su AD e Y su BC, come in figura. Poiché le rette AB, XY, DC sono parallele, per il teorema di Talete si ha la proporzione $DX : XA = CY : YB$, e dunque $DX : (DX + XA) = CY : (CY + CB)$, ovvero $DX : DA = CY : CB$.



Si osservi ora che i triangoli ABD e XPD sono simili, poiché XP è parallelo ad AB (dunque $D\widehat{X}P=D\widehat{A}B$ e $D\widehat{P}X=D\widehat{B}A$); ne deriva la proporzione fra lati corrispondenti $XP : AB = DX : DA$.
Allo stesso identico modo, il triangolo ABC è simile al triangolo PYC (PY è parallelo ad AB, gli angoli corrispondenti che si formano sono congruenti), e vale la proporzione $PY : AB = CY : CB$.
Combinando le proporzioni scritte sinora, $XP : AB = DX : DA = CY : CB = PY : AB$, dunque $XP = PY$, come volevasi dimostrare.

(b) Sia M il punto d'intersezione tra QP e la base minore. Per il parallelismo tra DC e XY abbiamo, alla maniera della dimostrazione precedente, la similitudine tra il triangolo QDM e il triangolo QXP, come pure fra il triangolo QMC e il triangolo QPY. Ne ricaviamo le proporzioni $DM : MQ = XP : PQ$ e $CM : MQ = YP : PQ$; poiché, per il punto (a), $XP = YP$, se ne ricava $DM : MQ = CM : MQ$, e dunque infine $DM = CM$ (M è il punto medio di DC).

Seconda Soluzione

Si osservi che le tesi del problema (sia quella del punto (a) che quella del punto (b)) sono invarianti per trasformazioni affini del piano: le affinità conservano infatti i rapporti fra le lunghezze di segmenti sulla stessa retta, e dunque è sufficiente mostrare le tesi su di un'immagine affine della costruzione iniziale.

Ogni trapezio $ABCD$ può essere trasformato tramite affinità in un trapezio isoscele; si prenda ad esempio l'affinità che fissa A e B e manda Q in un punto (diverso dal punto medio di AB) sull'asse di AB. Il triangolo ABQ viene mandato in un triangolo isoscele, il trapezio in un trapezio isoscele; poiché le affinità mandano rette in rette e conservano il parallelismo, la costruzione del problema rimane la medesima. Ci siamo così ridotti a mostrare che $XP = PY$ e che QP incontra la base minore nel suo punto medio nel caso in cui $ABCD$ sia isoscele. In questo caso le tesi sono però evidenti per simmetria: P si trova sull'asse di AB, CD e XY, che passa per Q.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Ovviamente si assegnino **15 punti** per la soluzione completa, anche con traccia diversa dalle soluzioni proposte.

- Elencare le soluzioni: **1 punto**.
- Affermare che $(a,b) = (b,c) = (c,a) = 1$: **2 punti**.
- Dimostrare la precedente asserzione: **2 punti**.
- Dedurre che allora abc divide $a+b+c$: **4 punti**.
  A chi deduce (erroneamente) la divisibilità dalla sola informazione $\mathrm{MCD}(a,b,c) = 1$ assegnare comunque **2 punti**.
- Passare dall'informazione di divisibilità (abc divide $a+b+c$) alla disuguaglianza $abc \leq a+b+c$: **2 punti**.
- Dedurne la disuguaglianza $abc \leq 3c$: **2 punti**.
- Elencare correttamente i casi possibili e trattarli: **2 punti**.

Valutazione per la soluzione alternativa:

- Elencare le soluzioni: **1 punto**.
- Osservare che $a+b = c$ o $2c$: **4 punti**.
- Trattare il caso $a+b = 2c$: **2 punti**.
- Trattare il caso $a+b = c$: **8 punti**, indicativamente così suddivisi:
  - Riscrivere le ipotesi di divisibilità in termini dei soli a, c (o b, c) senza ulteriori manipolazioni: **1 punto**.
  - Convertire le due relazioni di divisibilità non banali ancora a disposizione in una relazione che coinvolga una sola variabile (k nella soluzione ufficiale): **3 punti**.
  - Elencare correttamente (in particolare, menzionando i divisori negativi) le possibilità a partire da tale relazione di divisibilità: **1 punto**.
  - Esprimere le terne in funzione di una sola variabile (e dei valori possibili per k): **1 punto**.
  - Utilizzare la disuguaglianza $a \leq b$ per escludere uno dei casi: **1 punto**.
  - Sfruttare l'informazione sul massimo comun divisore per dimostrare che $a = 1$: **1 punto**.

Esercizio 16

Il punto (a) del problema vale **4 punti**, il punto (b) **4 punti** ed il punto (c) **7 punti**. Come sempre per ciascuna delle parti si assegni punteggio pieno qualora venga presentata una soluzione completa, anche se diversa da quella proposta.
Per soluzioni parziali del punto (a) si assegnino punti secondo le seguenti indicazioni:

- **1 punto** per chi osserva che l'ordine dei salti è ininfluente;
- **1 punto** per chi osserva che data una soluzione, la sequenza a segni invertiti è anch'essa soluzione;
- comunque non più di **3 punti** per chi osserva che è possibile tornare in 0 ogni 4 salti senza osservare che 2012 è multiplo di 4,
- in particolare si assegnino **0 punti** a chi afferma che è possibile perché 2012 è pari.

Per soluzioni parziali del punto (b):

- **1 punto** per chi osserva che l'ordine dei salti è ininfluente;
- non si assegnino comunque più di **2 punti** per una dimostrazione non completa;
- in particolare si assegnino **0 punti** a chi afferma che non è possibile perché 2013 è dispari.

Per soluzioni parziali del punto (c):

- **2 punti** per chi determina correttamente i 4 casi, senza giustificarne alcuno;
- **1 punto** per chi determina correttamente solo i due casi in cui è/non è possibile, senza giustificarli;
- **2 punti** per chi dimostra che è possibile tornare nell'origine per tutti gli n multipli di 4 (Si possono assegnare **3 punti** se non è stato svolto il punto (a));
- **2 punti** per chi dimostra che è possibile per n congruo a 3 modulo 4;
- **1 punto** per chi dimostra che non è possibile per n congruo a 1 modulo 4;
- **1 punto** per chi dimostra che non è possibile per n congruo a 2 modulo 4.

Esercizio 17

La parte (a) del problema ha un valore di **10 punti**, la parte (b) di **5 punti**.
Come sempre, qualunque dimostrazione completa, anche se diversa da quelle ufficiali (ad esempio fatta usando la geometria analitica o la trigonometria) merita la totalità dei punti; l'impostazione di calcoli analitici o trigonometrici che non portino alla tesi né a nessuno dei passi intermedi sotto riportati vale **0 punti**.
Per soluzioni parziali del punto (a) che seguano approssimativamente la traccia della prima soluzione proposta, si valuti secondo le seguenti indicazioni.

- **3 punti** per l'uso del teorema di Talete ai fini della proporzione $DX : XA = CY : YB$.
- **2 punti** per la dimostrazione della similitudine tra i triangoli ABD e XPD.
- **2 punti** per la dimostrazione della similitudine tra i triangoli ABC e PYC.
- **3 punti** per l'uso combinato di proporzioni seguenti dalle precedenti osservazioni in modo da dimostrare il punto (a).

Una soluzione completa della parte (b) vale **5 punti**. Chi dimostrasse correttamente la seconda parte (o qualche suo passo intermedio) assumendo la prima ha diritto a un numero di punti (fra 0 e 5) appropriato per ciò che dimostra, indipendentemente dalle lacune del punto (a). Si assegnino punteggi parziali secondo le seguenti indicazioni.

- **1 punto** per la dimostrazione della similitudine tra i triangoli QDM e QXP.
- **1 punto** per la dimostrazione della similitudine tra i triangoli QCM e QYP.