Principio di induzione: esempi ed esercizi

Principio di induzione:

Se una proprietà $\mathcal{P}(n)$ dipendente da una variabile intera n vale per $n = 1$ e se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ allora $\mathcal{P}$ vale su tutto $\mathbb{N}$.

Esercizi:

Si possono dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

5. Se $x > -1$ allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

6. $n! \geq 2^{n-1}$.

7. $n^2 > 2n + 1$ per ogni intero $n \geq 3$.

8. $2^n > n^2$ per ogni intero $n \geq 5$.

9. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$ da cui segue
   $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $q \neq 1$.

10. Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$.

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Dimostrazioni.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. La proprietà è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Supposta vera per n verifichiamo per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$. La proprietà è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2$.

Supposta vera per n verifichiamo per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\right) + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Vero per $n = 1 : 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Verifica che $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. Vero per $n = 1$. Verifica che $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

5. $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Per $n = 1$ vale l'uguaglianza. $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

si noti che la prima disuguaglianza della riga precedente vale perché $1 + x > 0$ e la seconda perché $nx^2 \geq 0$.

6. $n! \geq 2^{n-1}$: banalmente vera (con l'uguale) per $n = 1$ e per $n = 2$.
$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$, infatti

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \text{perché } n+1 \geq 2.$$

7. $n^2 > 2n+1$ per ogni intero $n \geq 3$. Falso per $n = 1$ e per $n = 2$, vero per $n = 3$.

$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ per ogni $n \geq 3$, infatti

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n+1) + 2n + 1 \geq 7 + 2n + 1 = 2n + 8 > 2(n+1) + 1.$$

8. $2^n > n^2$ per ogni intero $n \geq 5$. La proposizione è falsa per $n = 1, 2, 3, 4$ vera per $n = 5$.

Per ogni $n \geq 5$ si ha $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 \quad \text{per la proposizione precedente.}$$

9. $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$.
Ovvio per $n = 1$. Per il passaggio da n ad $n+1$ si può procedere così:
$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = a^n(a-b) + b\left(a^n - b^n\right) =$
$= a^n(a-b) + b(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) =$
$= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right)$.
Ponendo nella formula precedente $a = 1, b = q$ si ottiene (per $q \neq 1$)
$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ che può essere verificata, nel passaggio da n ad $n+1$, così:
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$
N. B. Da $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ si ottiene $q \cdot S_n = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$
da cui, sottraendo de due uguaglianze,
$S_n - qS_n = (1-q)\,S_n = 1 - q^{n+1}$, quindi $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

10. Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi. Ovvio per $n = 1$.

Supponiamo che E_n abbia 2^n sottoinsiemi e sia $E_{n+1} = E_n \cup \{z\}$ (dove $z \notin E_n$).

Dividiamo i sottoinsiemi di E_{n+1} in due famiglie: quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che non contengono z e quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che lo contengono.

La prima famiglia è costituita da tutti i sottoinsiemi di E_n (che sono 2^n), ogni insieme della seconda famiglia può essere costruito come unione di $\{z\}$ con un insieme della prima: abbiamo ancora 2^n insiemi: In tutto $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$. Per $n = 1$ si ha $\dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{2+1}$.
Per il passaggio da n ad $n+1$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$
Osservazione: questa uguaglianza può essere dimostrata direttamente tenendo conto che
$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \quad \text{quindi} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$
N. B. Nei passaggi precedenti si è fatto un cambiamento di variabile: ponendo $k = h - 1$ si ottiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{h=2}^{n+1} \frac{1}{2h-1}$. Si sono poi semplificati tutti i termini che compaiono col segno opposto nella prima e nella seconda somma.

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Per $n = 1$ si ha $\dfrac{1}{2} = 2 - \dfrac{3}{2}$. Per il passaggio da n ad $n+1$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$