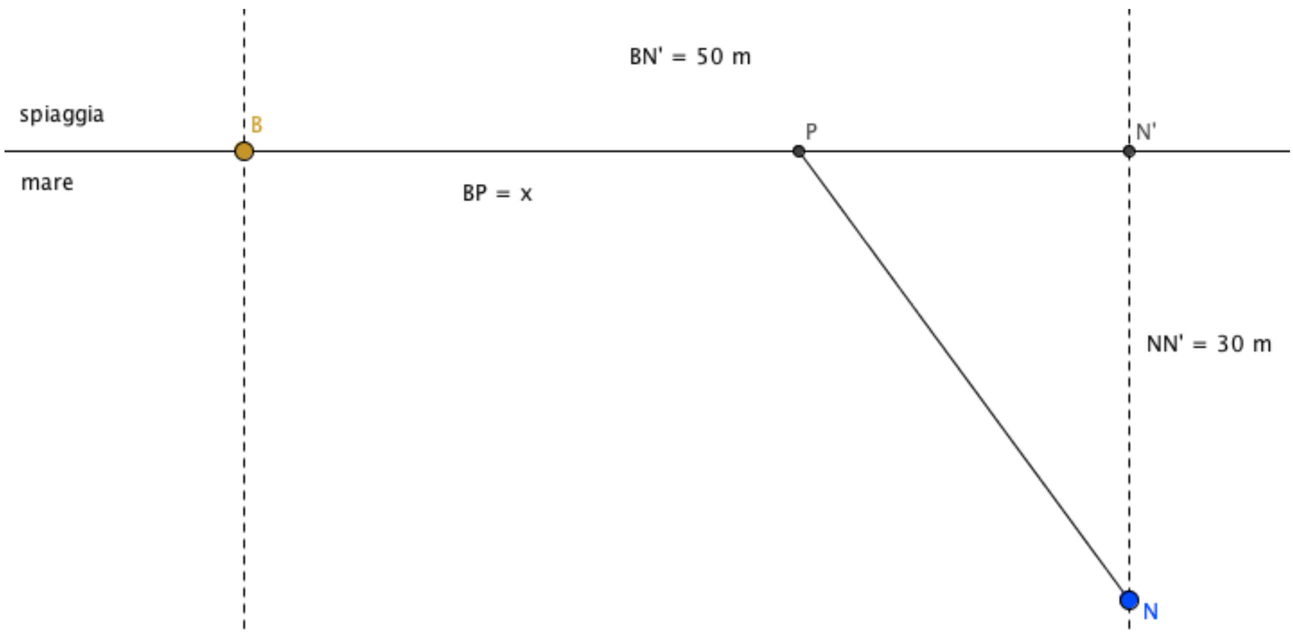
Verifica di Matematica

Classe V

Studente/ssa ____________________________

Problemi. *Risolvi uno dei due problemi proposti.*

PROBLEMA 1. Il dilemma del bagnino.
Un bagnino di Lido di Jesolo si trova sulla riva rettilinea del mare Adriatico. A 30 *m* dalla riva, come in figura, c'è un nuotatore in difficoltà. Appena il bagnino lo vede comincia a correre lungo la riva con una velocità $v_s = 5\ m/s$. A quel punto li sorge un dubbio: quando entrare in acqua in modo da salvare il nuotatore il prima possibile?
Tieni conto che in acqua il bagnino si muove di moto rettilineo a una velocità $v_a = 1{,}5\ m/s$ e che la distanza tra la posizione iniziale del bagnino e la proiezione del nuotatore sulla riva è di 50 *m*. Considera il nuotatore fermo.



i. Stima a che distanza dalla posizione iniziale il bagnino dovrebbe entrare in acqua, motivando esaurientemente la tua risposta.

ii. Determina la posizione esatta d'ingresso in acqua del bagnino e il tempo impiegato per il salvataggio.

Il nuotatore è stato salvato! Il giorno dopo presenti all'UBI (Unione Bagnini Italiani) il modello matematico da te ideato. Tale modello però ti viene contestato per due motivi:

- Quando il bagnino entra in acqua la sua velocità non diventa istantaneamente v_a ma varia in modo graduale.
- Quando il bagnino entra in acqua non cambia istantaneamente direzione ma anch'essa varia in modo graduale.

Un po' sconfortato per la bocciatura, ti rimetti al lavoro per sodisfare le richieste dell'UBI. Decidi di affrontare una problematica alla volta vista la complessità del modello.
Per il primo punto consideri che il bagnino compia sempre tratti rettilinei ma, nell'entrare in acqua, la sua velocità varia a causa della forza di attrito dell'acqua in base alla relazione $F = -kv$, dove $k = 35\ kg/s$. Sai che la massa del bagnino è $m = 70\ kg$.

iii. Determina l'espressione analitica della velocità nel tratto in cui varia gradualmente (ricorda il secondo principio della dinamica!).

Ipotizzi, per semplicità, che la posizione del punto *P* sia comunque rimasta invariata.

iv. Tenendo conto che la velocità del bagnino varia dal massimo v_s al minimo v_a, determina l'istante di tempo t_a nel quale il bagnino raggiunge la velocità v_a, ponendo $t_0 = 0$ come istante iniziale il momento in cui il bagnino comincia a correre.

v. Determina il tempo impiegato per il salvataggio. Determina infine e l'espressione analitica della velocità e rappresentala su un grafico *v-t*.

Ti senti soddisfatto del lavoro svolto e decidi che affronterai il secondo punto in seguito (vedi quesito 3). *[inventato]*

PROBLEMA 2. Lettini da mare.
La ditta Pol & Jare ha un settore che tiene attivo dal 1° febbraio al 30 aprile (90 giorni) per produrre lettini da mare. I lettini prodotti sono tenuti in un magazzino il cui affitto è di 1850,00 € al mese, nel periodo che va dal 1° febbraio al 31 ottobre (275 giorni).
Il costo per produrre *n* lettini è ben modellizzato dalla funzione

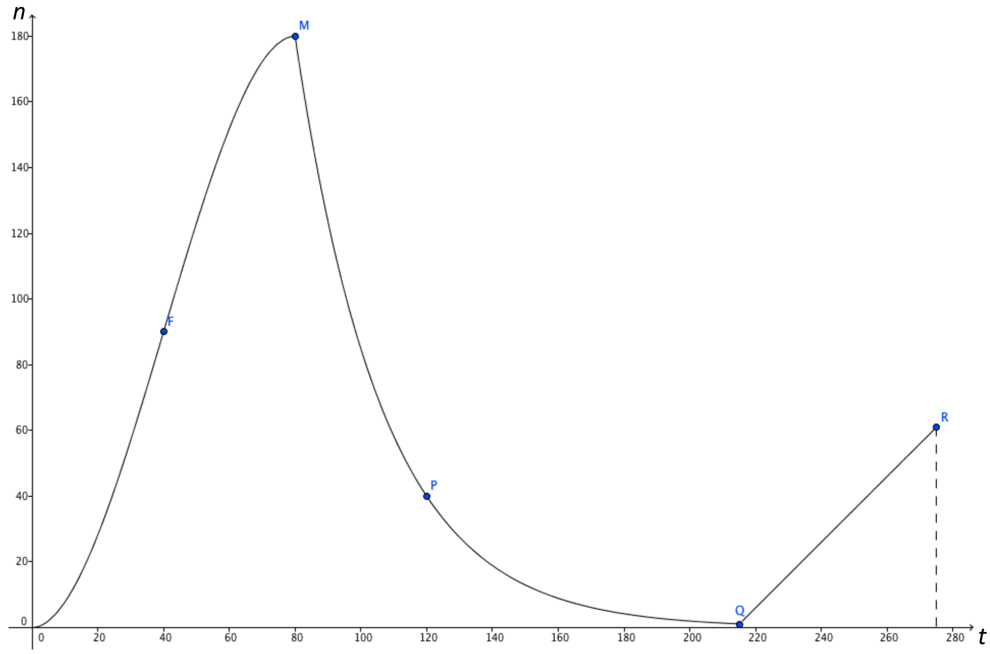
$$C_P(n) = 25\ln\left(1+4n^2\right).$$

Il prezzo di vendita di ogni lettino prodotto è di 80,00 €.
Tenendo conto che la ditta, nel periodo di produzione, ha un costo fisso giornaliero per le spese ordinarie (affitto di macchinari e del magazzino, tasse, stipendi, …) e straordinarie (manutenzione) pari a 1500,00 €, determina:

i. il numero minimo di lettini da vendere ogni giorno per non andare in perdita.

La domanda però non è costante. L'acquisto di lettini è possibile dal 1° febbraio al 31 ottobre, dopodiché il magazzino sarà svuotato, svendendo i lettini rimasti al prezzo di 40,00 € l'uno.

L'andamento della domanda è descrivibile dal seguente grafico, dove $t=i$ indica l'$(i+1)$-esimo giorno, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 274$.



Il grafico rappresenta una funzione a tratti il cui primo caso è una funzione razionale intera di terzo grado.

ii. Determina l'espressione analitica del primo caso della funzione nell'intervallo $[0;\ 80]$, sapendo che ammette un massimo $M(80;\ 180)$ e un punto di flesso $F(40;\ 90)$.

Il secondo caso è approssimabile con la funzione $g(t)=p\cdot e^{q\cdot t}$ con $t\geq 80$, dove p e q sono parametri reali.

iii. Determina l'espressione analitica del secondo caso della funzione, sapendo che passa per i punti M e $P(120;\ 40)$.

Appena la vendita giornaliera scende sotto l'unità, l'azienda comincia la svendita in modo da svuotare il magazzino. Nel periodo della svendita si ha un aumento lineare delle vendite. Nell'ultimo giorno (il 275-esimo) vengono venduti 60 lettini.

iv. Determina il guadagno complessivo dovuto alla vendita dei lettini, considerando come dominio della funzione l'intervallo $[0;\ 274]$.

Da accordi sindacali precedenti, agli operai del settore è previsto un premio produttività se la vendita media giornaliera è stata superiore alle 50 unità. Il padrone dell'azienda comunica che non si è giunti alla quota necessaria per erogare il premio. Un operaio, non fidandosi, ti contatta e chiede un tuo parere sulla veridicità dell'affermazione dell'imprenditore.

v. Aiuta l'operaio diffidente a capire se ha subito un torto.

[inventato]

Questionario. *Risolvi cinque dei dieci quesiti proposti.*

1. Un meteorite sta per cadere sulla Terra. Ha la stessa probabilità di cadere in qualsiasi suo punto. Determina la probabilità che cada nella zona tra l'Equatore e il tropico del Cancro, che si trova a una latitudine Nord di $23°\ 27'$ (l'area di una zona sferica è $2\pi R_T h$, dove h rappresenta l'altezza della zona. La latitudine è l'ampiezza dell'angolo al centro tra il raggio passante per il punto e la proiezione di questo raggio sul piano equatoriale).

2. Sai che la derivata di una funzione *f* è una funzione pari. Puoi concludere che:
   i. *f* è una funzione pari.
   ii. *f* è una funzione dispari.
   iii. *f* non è né una funzione pari né una funzione dispari.
   iv. Non è possibile determinare la parità di *f*.

   [inventato]

3. Considera la funzione definita a tratti

$$y = f(x) = \begin{cases} 30 & \text{se } 0 \le x < 40 \\ -3x + 150 & \text{se } 40 \le x \le 50 \end{cases} .$$

   Rappresenta il suo grafico e discutine continuità e derivabilità.
   Vuoi arrotondare lo spigolo presente in $P(40;\ 30)$ utilizzando un arco di circonferenza. Sai che la circonferenza deve essere tangente al grafico di f nei punti M, N. Sai che $M(\alpha;\ 30)$, $0 \le \alpha < 40$, e che N è tale che $\overline{PN} = 10$. Determina il valore di α. *[inventato]*

4. "Se un automobilista compie un viaggio senza soste con una velocità media di $60\ km/h$, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile ha indicato esattamente $60\ km/h$". Dire se l'affermazione è vera, formalizzando il problema utilizzando il Teorema di Lagrange. *[SOS 2001]*

5. Vuoi costruire una piscina i cui bordi sono un ramo di parabola di equazione $y - 10 = -0{,}1(x - 10)^2$ con $x \ge 0$, una retta di equazione $2x + 3y = 0$ e un'altra retta di equazione $2x - y - 40 = 0$. Sapendo che l'altezza varia secondo la funzione $h(x) = \dfrac{9x + 20}{100}$ e che le misure sono espresse in metri, dire quanti litri d'acqua può contenere la piscina.

   [ispirato a P1, SO 2011]

6. Determina l'insieme immagine della funzione $f\left(x\right)=\frac{2+\ln\left(1+e^{x}\right)}{x}$. *[inventato]*

7. Determina la posizione reciproca delle rette

$$r:\begin{cases} x-2y=-5 \\ 3y-z=1 \end{cases} \text{ e } s:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=10t+2 \\ z=4t+5 \end{cases}.$$

Se possibile, determina l'equazione del piano comune alle due rette.

8. Un campione radioattivo contiene $2\cdot 10^{10}$ nuclidi, ciascuno dei quali ha probabilità $p=10^{-10}$ di decadere in un secondo. Determina:
   i. Il numero medio di decadimenti in un secondo.
   ii. La probabilità di osservare due decadimenti in un secondo.
   iii. La probabilità di osservare almeno tre decadimenti in un secondo.

9. Determina tutte le soluzioni dell'equazione $y'+2y-x-2=0$. Trova infine quella che soddisfa la condizione $y\left(2\right)=3$.

10. Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{2n+1}{n^{2}\left(n+1\right)^{2}}\right)$ è convergente e determinarne la somma. *[inventato]*

NOTE:
   i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;
   ii. Punteggio massimo 15 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***10 p.ti***.