Verifica di Matematica

Classe V

Studente/ssa ____________________________

Problemi. Si risolva uno dei due problemi:

1. Si consideri una lattina di chinotto da $330\ m\ell$, approssimabile a un cilindro di base pari a 5 *cm*, la cui massa è di 15 *g* (lo spessore è trascurabile). Si supponga la lattina completamente piena di chinotto, la cui densità è pari a $1{,}024\ g/cm^3$. Si immagini che la lattina sia appoggiata su un tavolo perfettamente orizzontale e che il chinotto venga aspirato dall'alto in modo regolare tramite una cannuccia di massa trascurabile.

   i. Si descriva come varia l'altezza del baricentro del sistema lattina-chinotto man mano che il liquido viene aspirato.

   ii. Ricordando che l'altezza del baricentro di un sistema costituito da due masse è data dalla relazione (LATT sta per lattina e CHIN per chinotto)

   $$h = \frac{m_{LATT} \cdot h_{LATT} + m_{CHIN} \cdot h_{CHIN}}{m_{LATT} + m_{CHIN}},$$

   si determini l'altezza $h(x)$ del baricentro in funzione dell'altezza *x* del liquido. Si studi la funzione $y = h(x)$ e se ne tracci il grafico qualitativo in un piano cartesiano *Oxy*, senza considerare le limitazioni date dal problema.

   iii. Provare che, dentro i limiti posti dal problema, la funzione ammette un minimo assoluto.

[inventato]

2. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e centro *O* si considerino i punti *C* e *D* tali che la retta passante per *A*, *C* sia parallela alla retta passante per *D*, *O*. Si ponga $\overline{BC} = x$.

   i. Si determinino i valori del limite

      a. per *C* che tende a *B* del rapporto tra $\overline{AC}$ e $\overline{OD}$.

      b. per *C* che tende ad *A* del rapporto tra $\overline{AC}$ e la differenza tra $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

   Si consideri, d'ora in avanti, $r = 1$.

   ii. Si ponga $f\left(x\right) = \overline{AC} \Big/ \left(\overline{AB} - \overline{BC}\right)$. Si studi la funzione $y = f\left(x\right)$ e se ne tracci il grafico qualitativo in un piano cartesiano *Oxy*, senza considerare le limitazioni date dal problema.

   iii. Si determini il tipo di conica su cui giace il grafico della funzione $y = g\left(x\right) = \overline{CD}^2$ e si deduca il grafico di $y = h\left(x\right) = \overline{CD}$, tenendo conto dei limiti posti dal problema. Utilizzando i teoremi riguardanti le funzioni continue, dedurre che il triangolo *OCD* può essere equilatero.

[inventato]

Questionario. *Risolvi tre dei sei quesiti:*

1. Una volta mostrato che per x che tende a 2 la funzione $f(x)=\ln(2^x-3)$ è un infinitesimo, determinarne l'ordine. *[inventato]*

2. Determina i coefficienti dell'equazione $y=\dfrac{ax^2+6}{bx+3}$ affinché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo di equazione $y=x+3$. *[SU 2007]*

3. Quando una funzione reale è continua in un punto x_p ?

   Determina il valore del parametro reale *k* affinché la funzione sia continua su tutto *R*.

   [inventato]

$$f(x)=\begin{cases}\left(x^2+x/2+k\right)e^{x+1} & \text{se } x\le 0\\ k-x^2-1/2 & \text{se } x>0\end{cases}.$$

4. Determinare l'angolo in gradi sessagesimali tra i vettori $\vec{v}(1;\ 1;\ -1)$ e $\vec{w}(2;\ -3;\ 4)$, approssimando il risultato ai primi. *[inventato]*

5. La funzione $f(x)=2x^3-3x^2+2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo. *[OR 2003]*

6. Il limite della funzione $f(x)=x-\ln x$ per $x\to+\infty$ è:

   [A] 0. [B] un valore finito diverso da 0. [C] $+\infty$. [D] $-\infty$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata. *[SU 2006]*

NOTE:

i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;

ii. Punteggio massimo 15 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***10 p.ti***.