Esercizi su modelli matematici con esponenziali e logaritmi

1. Per un lavoro di un mese, quale compenso sarebbe più conveniente?
   i. Un miliardo di euro a fine mese.
   ii. Due euro il primo giorno, 4 euro il secondo, 8 il terzo e in generale 2^{n-1} euro l'*n*-esimo giorno.

   [la ii: $2\left(2^{29}-1\right)=1'073'741'822$ *]*

2. Si sa che, in condizioni ideali, una popolazione di batteri raddoppia ogni tre ore. Si suppone che inizialmente vi siano 100 batteri.
   i. Qual è la popolazione dopo 15 ore?
   ii. Qual è la popolazione dopo *t* ore?
   iii. Stimare la popolazione dopo 20 ore.
   iv. Disegnare la funzione che descrive la crescita della popolazione e stimare quando questa raggiunge quota 50 000.

   [3200 *;* $N\left(t\right)=100\cdot 2^{t/3}$ *;* $10'159$ *;* 27 *ore]*

3. Un isotopo del sodio, ^{24}Na, ha un tempo di dimezzamento di 15 ore. Un campione di questo isotopo ha massa 2 *g*.
   i. Trovare la massa rimanente dopo 60 ore.
   ii. Trovare la quantità rimanente dopo *t* ore.
   iii. Stimare la quantità rimanente dopo 4 giorni.
   iv. Usare un grafico per stimare quando la massa residua sarà di 0,01 *g*.

   [$0{,}125\ g$ *;* $N\left(t\right)=2^{1-t/15}$ *;* $\approx 0{,}024\ g$ *;* 115 *ore]*

4. La tabella seguente mostra la popolazione (in milioni) degli Stati Uniti tra il 1900 e il 2000.

anno	***popolazione (milioni)***
1900	76
1910	92
1920	106
1930	123
1940	131
1950	150
1960	179
1970	203
1980	227
1990	250
2000	275
2010	
2020	

Modellizzare la crescita con una regressione esponenziale e stimare così la popolazione nel 1925. Predire la popolazione negli anni 2010 e 2020.

[$N\left(t\right)=76\cdot e^{t/6{,}9}$ *;* $N\left(2{,}5\right)=109$ *milioni; nel 2010:* $N\left(11\right)=374$ *milioni; nel 2020:* $N\left(12\right)=433$ *milioni]*

5. Se una popolazione di batteri, inizialmente di 100 individui, raddoppia ogni tre ore, il numero di batteri dopo *t* ore è $N(t)=100\cdot 2^{t/3}$ [vedi Esercizio 2ii].
   i. Trovare la funzione inversa e spiegarne il significato.
   ii. Quando la popolazione raggiunge quota 50000?

   [$t(N)=3\cdot\log_2\dfrac{N}{100}$*; 27 ore]*

6. Quando si scatta una fotografia con un flash, le batterie ricominciano immediatamente a caricare il condensatore del flash con una carica elettrica che è data da $Q(t)=Q_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$.

   (Q_0 è la massima capacità di carica, τ è una costante chiamata *tempo caratteristico* e *t* è espresso in secondi.)
   i. Trovare la funzione inversa e spiegarne il significato.
   ii. Quanto tempo è necessario per ricaricare il 90% della capacità se $\tau=2\ s$?

   [$t(Q)=\tau\cdot\ln\dfrac{Q_0}{Q_0-Q}$*;* $t(0{,}9\cdot Q_0)\approx 4{,}605\ s$ *]*

7. La popolazione di una certa specie animale che occupa un ambiente limitato è inizialmente di 100 unità e può raggiungere il numero di 1000. È inoltre descritta da

$$P(t)=\frac{100000}{100+900e^{-t}},$$

   dove *t* è misurato in anni.
   i. Disegnare questa funzione e stimare quanto tempo occorre perché la popolazione raggiunga le 900 unità.
   ii. Trovare la sua funzione inversa e descriverne il significato.
   iii. Usare la funzione inversa per trovare il tempo necessario perché vengano raggiunte le 900 unità. Confrontare il risultato con quello della domanda i.

   [$e^{-t}\rightarrow 900e^{-t}\rightarrow 100+900e^{-t}\rightarrow\dfrac{1}{100+900e^{-t}}\rightarrow P(t)$*;* $t(P)=\ln\dfrac{9P}{1000-P}$*;* $t(900)\approx 4{,}4$ *anni]*