Esercizi su modelli matematici con esponenziali e logaritmi

1. Nel 1938 von Bertalanffy, per descrivere la crescita del pesce *Lebister reticulatus*, utilizzò con successo la relazione malthusiana che permette di determinare la lunghezza l (in centimetri) del pesce al tempo t (in mesi):

$$l(t) = l_{MAX} - l_0 e^{kt}.$$

Sai che la lunghezza massima che raggiunge il pesce è $l_{MAX} = 26{,}6\ cm$ e che $l_0 = 19{,}4\ cm$.

i. Quanto lungo è il pesce appena nato?
ii. Il parametro reale k è sempre positivo, negativo o nullo? O può assumere qualsiasi valore?
iii. Determina il valore di k sapendo che il pesce impiega tre anni a raggiungere il 60% della sua lunghezza massima.
iv. Determina dopo quanto tempo il pesce raggiunge il 50% della sua lunghezza massima.

[7,2 cm; negativo; $\frac{1}{36}\ln\frac{266}{485} \approx -0{,}0167$*; 1 anni e 11 mesi]*

2. Nel 1991 gli abitanti di Padova sono stati stimati essere circa 215000 (dati ISTAT). Si conoscono anche i tassi di natalità $\beta = 8{,}1‰$ e di mortalità $\mu = 11{,}1‰$, che consideriamo costanti nel tempo (dati UrbiStat). Ipotizzando che la popolazione vari secondo una malthusiana (con il tempo espresso in anni), determinare:

i. La numerosità della popolazione dopo t anni dal 1991.
ii. La numerosità della popolazione nel 2011.
iii. La bontà del modello utilizzato (rapporto percentuale tra N_{MOD}/N_{DATO}), sapendo che nel 2011 la popolazione padovana constava di 206000 individui (dati ISTAT).
iv. In quale anno la popolazione scenderà sotto le 200000 unità.

[$N(t) = 215000 \cdot e^{-0{,}003t}$*; 202479; 98,3%; quest'anno]*

3. Jorge e Khalil sono due biologi che assieme studiano l'evoluzione di una coltura batterica inizialmente composta da 800 individui. Hanno deciso di tenere la coltura ad anni alterni: un anno in Germania e un anno nelle terre di Palestina. Quando la coltura si trova in Germania dimezza la popolazione ogni tre mesi. Quando la coltura si trova in Palestina la popolazione triplica ogni quattro mesi. Il primo anno la coltura si trova in Germania.

i. Determina la numerosità popolazione alla fine del primo anno.
ii. Determina la numerosità della popolazione alla fine del secondo anno.
iii. Trova l'espressione analitica che esprime la numerosità della popolazione al tempo t (espresso in mesi) nell'arco dei primi tre anni.
iv. Dopo quanti mesi la popolazione risulta essere quella di partenza nell'arco dei primi tre anni?

$$[50;\ 1350;\ N(t) = \begin{cases} 800 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} & se \quad 0 \le t < 12 \\ \dots & se \quad 12 \le t < 24 \\ 1350 \cdot 2^{-\frac{t-24}{3}} & se \quad \dots \end{cases};\ 0,\ 23\ e\ 27\ \textit{mesi}]$$

4. Un'isola è stata colonizzata da alcune persone. La numerosità della popolazione nell'isola è ben modellizzata dall'equazione

$$N(t) = \frac{1000\ell}{1000 + (\ell - 1000)e^{-t/2}},$$

dove il tempo t è espresso in decadi di anni.

  i. Determina il numero di colonizzatori.
  ii. Determina il valore massimo ℓ che può raggiungere la popolazione, sapendo che la popolazione raddoppia in vent'anni.
  iii. Determina dopo quanti anni la popolazione triplica.

[1000 ; 4784 ; ≈37 anni]

5. In una stessa banca hai aperto due conti: il primo con un capitale di 12000 € in regime di capitalizzazione semplice al 2% annuo; il secondo con un capitale di 9000 € in regime di capitalizzazione composta al 2% semestrale.

  i. Determina il montante al tempo t (espresso in anni) dei due conti correnti.
  ii. Calcola i due montanti alla dopo 5, 10 e 15 anni.
  iii. Stima dopo quanti anni i due conti avranno il medesimo montante.

[$M_1(t) = 240(50 + t)$ *e* $M_2(t) = 9000(51/50)^{2t}$; 13200 € *e* 10970,95 € *dopo 5 anni;* 14400 € *e* 13373,53 € *dopo 10 anni;* 15600 € *e* 16302,25 € *dopo 15 anni; 14]*