Tante geometrie

La geometria *euclidea*, che hai incontrato più volte a vari livelli nel corso dei tuoi studi, è la geometria più diffusa perché è la più adatta a descrivere il mondo rispetto a come direttamente osservato dai nostri sensi. Tuttavia, già all'inizio del XIX secolo ebbero origine vari studi i quali hanno mostrato che essa *non* è l'unica geometria possibile. Da una parte, infatti, si scoprì la consistenza delle **geometrie non euclidee**, cioè delle geometrie costruite facendo cadere l'**assioma della parallela**; dall'altra, principalmente con **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867), prese forma lo studio di una nuova geometria, che traeva le sue origini dalle regole della prospettiva utilizzate dagli artisti del Rinascimento: la cosiddetta **geometria proiettiva**, che si occupava dello studio delle proprietà delle figure che si conservano attraverso la proiezione centrale (fig. 6.8).

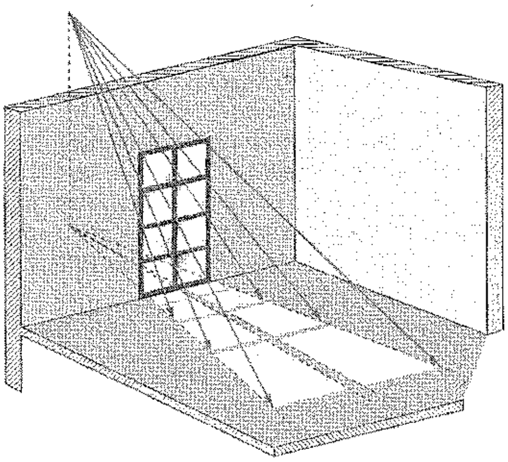


Figura 6.8 L'allineamento dei punti è una proprietà invariante in una proiezione centrale; *non* è una proprietà invariante il parallelismo tra le coppie di rette (che viene invece conservato da un'affinità).

La scoperta dell'esistenza di altre geometrie oltre a quella euclidea poneva il problema di definire che cosa fosse esattamente «una geometria» e di capire se le varie geometrie che erano state scoperte potevano essere guardate da un punto di vista unitario. Questo processo di unificazione fu realizzato dal matematico tedesco **Felix Klein** (1849-1925); nel 1872, a soli 23 anni, nella lunga dissertazione per l'apertura dell'anno accademico all'Università di Erlangen, Klein trovava questo principio unificatore nella nozione di **gruppo di trasformazioni**. Cerchiamo di capire di che cosa si tratta.

I gruppi di trasformazioni

Per chiarire il significato dell'espressione «gruppo di trasformazioni» dobbiamo anzitutto introdurre la definizione di **gruppo**: si dice *gruppo* un insieme dove è definita un'operazione *interna* con le seguenti proprietà:

- è dotata di *elemento neutro;*
- è *associativa;*
- *ogni* elemento dell'insieme ha *inverso.*

Esempi	Controesempi
L'insieme **R** è un gruppo rispetto all'operazione di addizione.	L'insieme **N non** è un gruppo rispetto all'operazione di addizione. Infatti l'addizione in N è dotata di elemento neutro ed è associativa, ma gli elementi di N non hanno inverso rispetto all'addizione.
L'insieme $\mathbf{R}^+$ dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione.	L'insieme **R** dei numeri reali **non** è un gruppo rispetto all'abituale operazione di moltiplicazione. Infatti la moltiplicazione in **R** è associativa e ammette come elemento neutro 1, ma c'è un elemento dell'insieme, lo 0, che non ammette inverso rispetto alla moltiplicazione.

Si potrebbe dimostrare che molti degli insiemi di trasformazioni che abbiamo studiato sono dei *gruppi* (nel senso appena specificato) rispetto all'operazione di *composizione di trasformazioni*. Precisamente, sono gruppi: l'insieme delle affinità, l'insieme delle similitudini e l'insieme delle isometrie.

L'insieme delle *isometrie* e l'insieme delle *similitudini* vengono detti **sottogruppi** del gruppo delle affinità perché sono sottoinsiemi di questo insieme e risultano a loro volta gruppi rispetto alla stessa operazione definita nel gruppo delle affinità (la composizione di trasformazioni).

Altri insiemi che costituiscono un gruppo, sempre rispetto alla composizione di trasformazioni, sono l'insieme delle *isometrie dirette*, l'insieme delle *similitudini dirette*, l'insieme delle *affinità dirette* e l'insieme delle *traslazioni*.

Particolare attenzione va riservata alle *rotazioni* e alle *omotetie*: mentre le rotazioni (le omotetie) **di centro fissato** formano un gruppo, l'insieme di *tutte* le omotetie (di tutte le rotazioni) **non** forma un gruppo, poiché la composizione di trasformazioni non risulta un'operazione interna all'insieme stesso; per esempio, la composizione di due omotetie (di due rotazioni) con centri *diversi* può essere una traslazione.

Non sono gruppi, rispetto alla composizione di trasformazioni, l'insieme delle isometrie *indirette*, l'insieme delle similitudini *indirette* e l'insieme delle affinità *indirette*. Anche rispetto a questi insiemi, infatti, la composizione di trasformazioni **non** è un'operazione interna: per esempio, componendo la simmetria rispetto all'asse x e la simmetria rispetto all'asse y (che sono due isometrie *indirette*) si ottiene la simmetria rispetto all'origine, che è un'isometria *diretta*.

Il programma di Erlangen

Possiamo ora ritornare al discorso inaugurale di Klein, divenuto noto come **programma di Erlangen**. In esso Klein descrisse la geometria come *lo studio delle proprietà delle figure invarianti rispetto a un particolare gruppo di trasformazioni*.

Questo nuovo punto di vista permise di accantonare il dibattito su quale fosse la *vera* geometria, inquadrando le varie geometrie in una concezione organica: una geometria si distingue da un'altra soltanto per il gruppo di trasformazioni che è posto alla sua base. Così, per Klein, il gruppo delle isometrie definisce la geometria *euclidea*, il gruppo delle affinità definisce la geometria *affine* e il gruppo delle proiettività la geometria *proiettiva*.

Le idee innovative introdotte da Klein hanno guidato il pensiero geometrico per oltre cinquant'anni e hanno trovato applicazione anche in una delle più importanti branche della matematica moderna: **la topologia**.

Secondo l'approccio indicato da Klein, la topologia può essere definita come la geometria che studia le proprietà invarianti rispetto all'azione di un particolare gruppo di trasformazioni, gli *omeomorfismi*. Intuitivamente, tali trasformazioni sono assimilabili a «deformazioni elastiche» (**fig. 6.9**).

Più formalmente, gli omeomorfismi possono essere definiti come le trasformazioni geometriche che hanno la proprietà di essere *continue* e di possedere una inversa *continua* (vedrai qual è esattamente il significato del concetto di *continuità* nel proseguimento dei tuoi studi; per ora puoi limitarti a pensare una «trasformazione continua» come una trasformazione che gode della proprietà per cui punti «vicini» prima della trasformazione restano tali anche dopo).

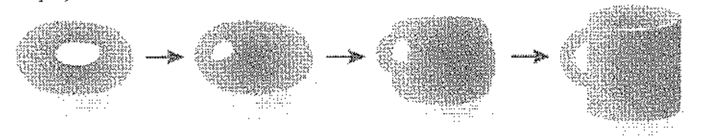


Figura 6.9 Immaginiamo gli oggetti in figura costituiti da argilla modellabile. Possiamo facilmente renderci conto che, con la sequenza di deformazioni illustrate, una ciambella può essere trasformata in una tazza. Formalmente ciò si può esprimere dicendo che una tazza e una ciambella si corrispondono in un omeomorfismo.

Geometrie non euclidee

La Geometria euclidea si basa su cinque assiomi che negli *Elementi* di Euclide vengono chiamati *postulati*. Essi richiedono che:

i. si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
ii. una retta terminata si possa prolungar continuamente per diritto;
iii. si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
iv. tutti gli angoli retti siano uguali tra loro;
v. se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Osservazione 1:
1. i postulati i-iii sono collegati all'uso della *riga e compasso*. Per i greci antichi, un problema di geometria era risolvibile solo se la sua soluzione poteva essere costruita con l'uso esclusivo di questi strumenti.
2. Il postulato v è molto più articolato dei primi quattro. Fondamentalmente, il problema di tale postulato riguarda il concetto di infinito ("illimitatamente").

Fin dall'antichità si cercò il modo di risolvere il problema del v postulato. L'idea preferenziale era quella di cercare di dedurre il postulato v dai primi quattro, in modo che diventasse un *teorema*. Nel (vano) tentativo di fare ciò, si scoprirono forme equivalenti del v postulato, tra i quali:

- Dati una retta r e un punto P esterno ad essa, per P passa una e una sola retta parallela ad r.
- La somma degli angoli interni di un triangolo è $2\hat{R}$ (ne consegue la validità del Teorema di Pitagora).
- Esistono triangoli simili ma non congruenti.
- Il rapporto tra una circonferenza c e il suo diametro $2r$ è costante ($c/(2r) = \pi$).
- La diagonale d e il lato ℓ di un quadrato sono incommensurabili ($d/\ell = \sqrt{2}$).

Una versione moderna dei cinque postulati è la seguente:

i. Per due punti passa una e una sola retta.
ii. Qualsiasi segmento può essere prolungato quanto si vuole in linea retta, a partire da entrambi gli estremi.
iii. Si può tracciare una circonferenza di dati centro e raggio.
iv. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.
v. Due rette tagliate da una trasversale si incontrano dalla parte dove si formano angoli coniugati interni, la cui somma è minore di due angoli retti.

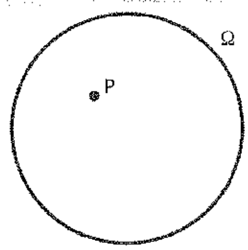
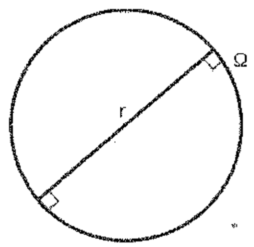
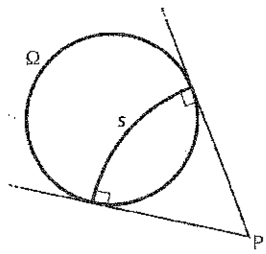
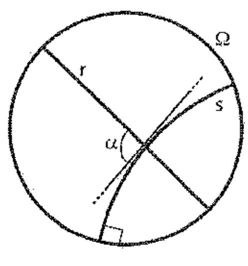
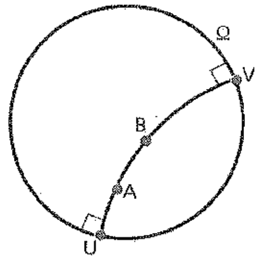
Osservazione 2:
1. Una conseguenza del postulato i è che due rette non possono racchiudere una superficie.
2. Una conseguenza del postulato ii è che una retta è sempre illimitatamente prolungabile.

Attorno al 1830, il matematico russo N. Lobačevskij e il matematico ungherese J. Bolyai risolsero il problema del postulato v "semplicemente" negandolo; ci sono due modi negare il v postulato:

v'. Dati una retta r e un punto P esterno ad essa, per P passano almeno due rette parallele ad r.
v''. Dati una retta r e un punto P esterno ad essa, per P non passa nessuna retta parallela ad r.

I due matematici utilizzarono lo stesso sistema di assiomi utilizzato da Euclide, sostituendo solamente il postulato v con il postulato v$'$. Questo nuovo sistema di assiomi risultò essere *non contraddittorio*, come lo era quello proposto da Euclide.
Nasce così una nuova geometria chiamata, in base al sistema di classificazione ideato da F. Klein, ***geometria iperbolica***.

La geometria iperbolica è descritta dal *modello di Poincarè* (fine '800):

Geometria di Lobačevskij	**Modello di Poincaré**	
punto	*punto interno a* Ω (esempio: punto *P*)	
	diametro di Ω (esempio: retta *r*)	
retta	oppure	
	arco di circonferenza interno a Ω *e ortogonale a esso* (esempio: retta *s*)	
angolo	*angolo fra due rette qualsiasi definite al punto precedente* (esempio: angolo tra le rette *r* e *s*)	
distanza fra due punti A e B	$\overline{AB} = \left\| \ln \dfrac{\overline{BU} \times \overline{AV}}{\overline{BV} \times \overline{AU}} \right\|$, dove *U* e *V* sono i punti estremi della retta passante per *A* e *B* posti sulla circonferenza	

La **geodetica** è la curva di minima lunghezza che unisce due punti di uno spazio in cui è definito un criterio di misura. Per convenzione, chiamiamo *rette* le geodetiche.

La distanza fra due punti *A* e *B* è la misura del segmento di geodetica che congiunge *A* e *B*.

Le conseguenze di questa teoria sono che:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di $2\hat{R}$.
- Non vale il Teorema di Pitagora.
- Due triangoli con gli angoli congruenti sono tra loro congruenti.
- Il rapporto tra circonferenza c e diametro $2r$ non è costante ($c/(2r) > \pi$).
- La diagonale d e il lato ℓ di un quadrato possono essere commensurabili ($1 < d/\ell < \sqrt{2}$).

Si può notare invece che il sistema formato dai postulati i-iv e v" porta a delle contraddizioni. In particolare, andavano a cadere le conseguenze dei postulati i e ii evidenziati nell'Osservazione 2. Ne consegue che:

- Si modifica il postulato i, ammettendo quindi che due rette possano racchiudere una superficie (postulato i").
- Si modifica il postulato ii, escludendo la possibilità di prolungare illimitatamente le rette (postulato ii").

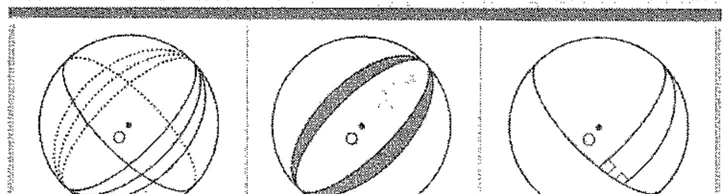
Il sistema di assiomi formato dai postulati i", ii, iii, iv e v" è non contradditorio e sono la base di una teoria chiamata **geometria sferica**.

Il sistema di assiomi formato dai postulati i, ii", iii, iv e v" è non contradditorio e sono la base di una teoria chiamata **geometria ellittica.**

Nella classificazione di Klein la Geometria euclidea prende il nome di **geometria parabolica.**

È interessante il *modello di Riemann* (metà '800) che descrive la geometria sferica:

Geometria sferica	Modello di Riemann
punto	*punto della superficie* Σ
retta	*cerchio massimo di* Σ (intersezione tra Σ e un piano passante per O)
angolo tra due rette	*angolo formato dai due piani che tagliano* Σ *secondo le due rette*



a. Rette nel modello Riemann.

b. Due rette distinte racchiudono sempre una superficie.

c. Angoli tra coppie di rette.

In queste geometrie (sferica ed ellittica) si hanno le seguenti conseguenze:

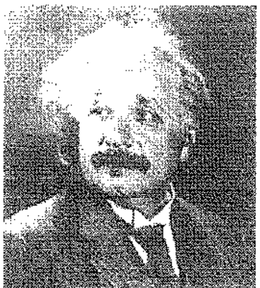
- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di $2\hat{R}$.
- Non vale il Teorema di Pitagora.
- Due triangoli con gli angoli congruenti sono tra loro congruenti.
- Il rapporto tra circonferenza c e diametro $2r$ non è costante ($c/(2r) < \pi$).
- La diagonale d e il lato ℓ di un quadrato possono essere commensurabili ($\sqrt{2} < d/\ell < 2$).

CLASSIFICAZIONE DELLE GEOMETRIE

A conclusione di questa unità può essere utile presentare un quadro riassuntivo delle geometrie analizzate. Sarà così possibile evidenziare alcune differenze e analogie che le caratterizzano.

Proprietà	Geometria: sferica	ellittica	parabolica (Euclide)	iperbolica (Lobačevskij)
assiomi euclidei modificati	I, V	II, V	nessuno	V
parallele per un punto a una retta data	nessuna		una	≥ 2
somma degli angoli interni di un triangolo	$> 2\hat{R}$		$= 2\hat{R}$	$< 2\hat{R}$
triangoli simili non congruenti	no		sì	no
teorema di Pitagora	no		sì	no
rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato	$\sqrt{2} < \frac{d}{l} < 2$		$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$	$1 < \frac{d}{l} < \sqrt{2}$

Isaac Newton



Albert Einstein

Nella tabella sono state evidenziate proprietà delle geometrie non euclidee che non sono state analizzate nel testo per non rendere troppo complessa la trattazione. Lo studente interessato può approfondire l'argomento consultando la bibliografia.
Dal confronto si può notare che la geometria euclidea è il caso particolare che separa in due grandi famiglie le geometrie non euclidee.

Geometria, spazio fisico e relatività generale

Lo spazio assoluto di Newton

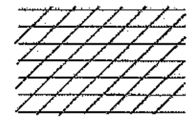
La scoperta delle geometrie non euclidee ha rivoluzionato la concezione del rapporto tra geometria e realtà.
La geometria euclidea, pur con il suo carattere idealizzato, aveva conservato un legame, un'implicita corrispondenza biunivoca, tra lo spazio geometrico astratto e lo spazio fisico concreto. Fino all'inizio dell'Ottocento si pensava che potessero esistere una sola geometria (quella euclidea) e un solo tipo di spazio fisico (lo spazio assoluto di Newton).
La fisica classica, fondata sulla dinamica e sulla teoria della gravitazione stabilite da Newton alla fine del Seicento, considerava lo spazio come un contenitore all'interno del quale si trova la materia. Tra spazio e materia non si riteneva esistesse alcuna interazione.
Lo spazio fisico newtoniano era euclideo, e le sue proprietà non potevano essere in alcun modo alterate dai corpi in movimento al suo interno. Nei *Princìpi matematici della filosofia naturale*, pubblicati nel 1687, Isaac Newton (1643-1727) scriveva: «Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile».

La relatività generale e gli spazi curvi

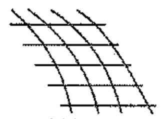
La scoperta di una pluralità di geometrie, insieme all'avvento della teoria della relatività generale di Albert Einstein (1879-1955), ha cambiato radicalmente la situazione.

Se si potevano «immaginare» molte geometrie, ci si poteva chiedere quale fosse la più adatta alla descrizione dello spazio fisico, il quale non doveva più essere considerato necessariamente euclideo.
Con la teoria della relatività generale Einstein ha proposto, nel 1916, una nuova teoria della gravitazione, che corregge quella di Newton in alcuni punti fondamentali. Essa prevede anche l'esistenza di un rapporto tra spazio e materia molto diverso da quello della teoria di Newton. Secondo la relatività generale la presenza di materia può «deformare» lo spazio nei termini seguenti:

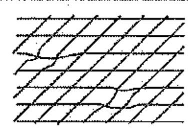
1) lo spazio *può* essere globalmente curvo e *deve* presentare curvature a livello locale;
2) l'eventuale curvatura «globale» dello spazio dipende dalla densità di materia che in esso si trova;
3) le deformazioni «locali» sono prodotte dai corpi in virtù della loro massa: esse sono tanto maggiori quanto più grandi sono le masse dei corpi. Solo un universo senza materia, se esistesse, sarebbe privo di deformazioni locali.



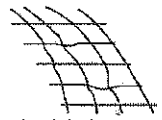
Spazio bidimensionale euclideo (piatto)



a Spazio bidimensionale curvo



Spazio globalmente euclideo, localmente incurvato



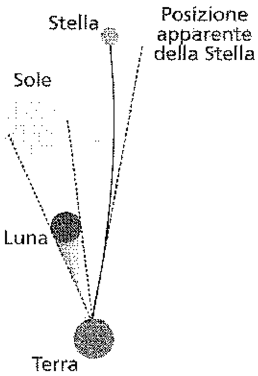
b Spazio globalmente curvo con deformazioni locali

Il caso bidimensionale

Non è facile visualizzare ciò che effettivamente accade nello spazio fisico. Per farlo, è opportuno ricorrere a un modello semplificato, e cercare poi di generalizzare i risultati ottenuti al caso reale.
Consideriamo pertanto due diverse superfici bidimensionali: una piatta e l'altra sferica. Supponiamo che su di esse vivano abitanti anch'essi bidimensionali, per i quali non esistono né l'alto, né il basso, ma solo la superficie su cui si muovono. Solo noi, che siamo esseri tridimensionali, siamo in grado di vedere «dall'esterno» il loro universo.
Nel primo caso abbiamo un universo di tipo euclideo, l'unico ammesso dalla fisica di Newton, mentre il secondo possiede una curvatura «globale» identica a quella che caratterizza il modello di Riemann. Sia l'universo euclideo sia quello curvo sono teoricamente possibili secondo la relatività generale: solo le misure possono aiutare a capire quale di essi si realizza concretamente.
Il problema della forma effettiva dello spazio è quindi un problema di fisica, e non di geometria.
Se ora, nei modelli analizzati nella loro struttura globale, aggiungiamo la possibilità che lo spazio sia localmente deformato dai corpi che vi si trovano, dobbiamo immaginare le superfici non più lisce, come in figura *a*, ma «scavate» in vari punti, come in figura *b*. Le deformazioni locali sono prodotte, secondo la teoria di Einstein, dalle masse dei corpi che incurvano lo spazio nelle loro vicinanze.

Lo spazio fisico

Se generalizziamo la nostra analisi, passando da due a tre dimensioni, perdiamo la possibilità di visualizzare la situazione: per farlo, dovremmo poter utilizzare quattro dimensioni.
La geometria e la fisica ci consentono tuttavia di studiare la situazione dal punto di vista sia analitico che sperimentale, deducendo quali proprietà lo spazio reale dovrebbe possedere per risultare piatto o curvo, sia localmente che globalmente.
Il problema dell'eventuale curvatura globale dello spazio è divenuto fondamentale per la moderna cosmologia, la branca della scienza che tenta di descrivere l'universo come un tutto, sulla base delle osservazioni astronomiche e delle leggi fisiche note.
In questo contesto, la relatività generale ammette sia la soluzione euclidea (figura *a*), sia soluzioni di tipo non euclideo (figura *b*, per esempio). Il verificarsi dell'una o delle altre dipende dalla densità di materia nell'universo. Le osservazioni più recenti (esperimento Boomerang, effettuato nel 2000) sembrano indicare che lo spazio ha una struttura globalmente euclidea.
L'esistenza delle deformazioni locali previste da Einstein è stata invece brillantemente confermata sin dal 1919, durante l'osservazione di un'eclisse totale di Sole. In quella occasione si osservò infatti che la massa del Sole è in grado di deviare i raggi di luce provenienti da stelle lontane quando questi passano nelle sue vicinanze. Le stelle vengono così osservate in posizioni diverse da quelle che dovrebbero occupare.
Questo fatto, totalmente inspiegabile sulla base della teoria di Newton, indica che lo spazio è incurvato dalla massa del Sole e che la luce, passando nelle sue vicinanze, percorre linee che non coincidono con le rette euclidee.



La posizione di una stella prossima al Sole, osservata durante un'eclisse totale.