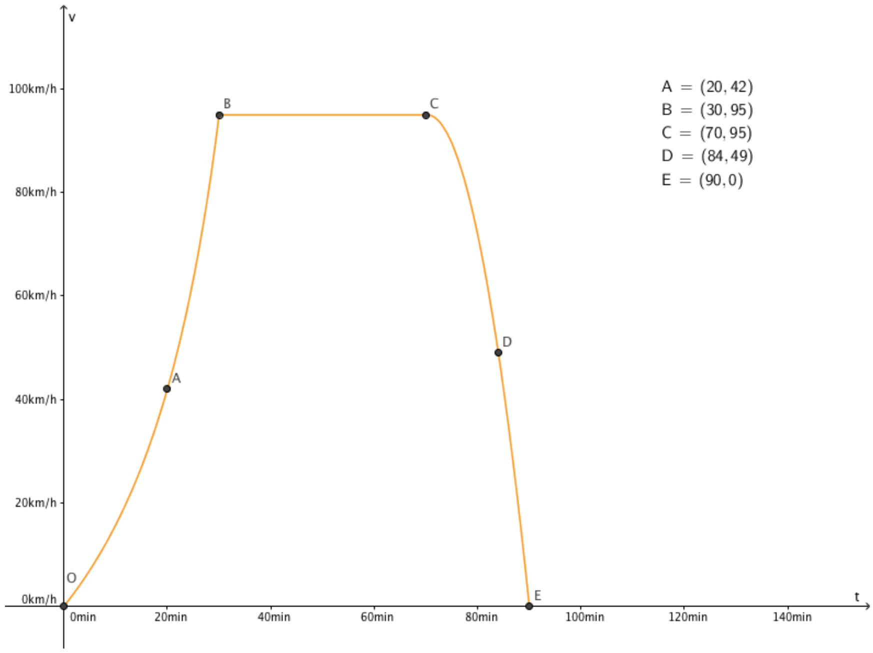
Es. 1 pag. 2079

Il diagramma seguente rappresenta l'andamento della velocità (in km/h) di un camion in funzione del tempo (in minuti).

Si possono individuare tre tratti: il tratto OB, approssimabile con un ramo d'iperbole; il tratto BC, rettilineo; il tratto CE, approssimabile con un ramo di parabola.



i. Determinare l'espressione analitica della velocità in funzione del tempo (espresso in ore) e studiarne le caratteristiche.

ii. Discutere continuità e derivabilità della funzione.

iii. Determinare quanti chilometri percorre il camion nei primi 90 minuti.

iv. Determinare la velocità media del camion in km/h.

Osservazione: i calcoli richiesti sono impegnativi.

Traccia della soluzione.

i. Determinare l'espressione analitica della funzione e studiarne le caratteristiche.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1995x}{1590-32x} & 0\le x<30 \\ 95 & 30\le x<70 \\ -\dfrac{41}{168}x^2+\dfrac{2881}{84}x-1110 & 70\le x\le 90 \end{cases},$$

dove x è espresso in minuti. Per determinare l'espressione della funzione in ore basta utilizzare la trasformazione (dilatazione)

$$\delta:\begin{cases} x'=\dfrac{x}{60} \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=60x' \\ y=y' \end{cases}.$$

Dopo aver rimpiazzato gli apici, si ottiene:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1995x}{95400-32x} & 0\le x<1/2 \\ 95 & 1/2\le x<7/6 \\ -\dfrac{6150}{7}x^2+\dfrac{14405}{7}x-1110 & 7/6\le x\le 3/2 \end{cases}.$$

ii. Discutere continuità e derivabilità della funzione.

La funzione è ovviamente continua in $x\in[0;\ 90]$ altrimenti il problema sarebbe irreale (un camion varia la sua velocità con continuità).
La funzione è derivabile in $]0;\ 90[\setminus\{30;\ 70\}$ perché polinomiale.

poiché $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3172050}{(95400-32x)^2} & 0<x<30 \\ 0 & 30<x<70 \\ -\dfrac{41}{84}x+\dfrac{2881}{84} & 70<x<90 \end{cases}$, $\dfrac{1007}{126}=\lim\limits_{x\to 30^-}f'(x)\ne\lim\limits_{x\to 30^+}f'(x)=0$ e

$0=\lim\limits_{x\to 70^-}f'(x)\ne\lim\limits_{x\to 70^+}f'(x)=11$, la funzione non è derivabile in 30 e in 70, dove presenta due punti angolosi.

iii. Determinare quanti chilometri percorre il camion.

Basta integrare la funzione (visto che $v = ds/dt \Rightarrow s = \int v\,dt$), fruttando la proprietà additiva dell'integrale:

$s = 1995\int_0^{30} \frac{1}{1590-32x}dx + 95\int_{30}^{70} dx + \int_{70}^{90}\left(-\frac{41}{168}x^2 + \frac{2881}{84}x - 1110\right)dx$, da cui trovo

$s = \left(\frac{319750}{63} - \frac{1995}{32}\ln\frac{21}{53}\right)\frac{km}{h}\cdot min = \left(\frac{319750}{63} - \frac{1995}{32}\ln\frac{21}{53}\right)\frac{km}{h}\cdot\frac{1}{60}h = \frac{31975}{378} - \frac{133}{128}\ln\frac{21}{53}$,

ovvero $s \approx 85{,}55\ km$.

iv. Determinare la velocità media del camion.

Basta applicare il Teorema del valor medio integrale:

$f(c) = \frac{1}{90-0}\cdot s\ km/min = \frac{3}{2}s\ km/h \approx 57\ km/h$, dove $c \in \left]0;\ 30\right[\cup \left]70;\ 90\right[$ (esistono due istanti di tempo nei quali la velocità istantanea coincide con quella media).