Liceo Scientifico Paritario "R. Bruni" Padova, loc. Ponte di Brenta, 11/04/2017

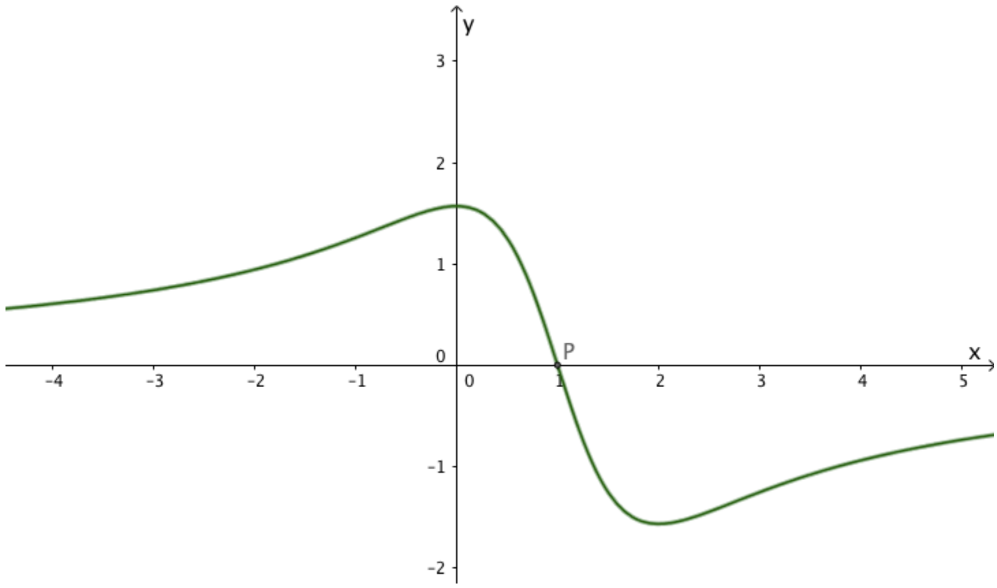
Verifica di Matematica

Classe V

Studente/ssa ____________________________

Problemi. *Risolvi uno dei due problemi:*

1. La figura mostra il grafico γ della funzione $f(x)=\dfrac{\pi(1-x)}{x^2-2x+2}$.



i. Dimostra che la curva γ è simmetrica rispetto al punto $P(1;\ 0)$ e che $\mathrm{Im}(f)=[-\pi/2;\ \pi/2]$.

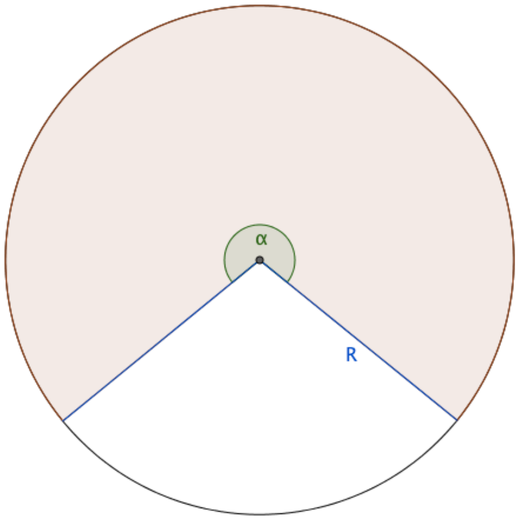
ii. Traccia il grafico probabile di $g(x)=\cos(f(x))$ e stabilisci quanti punti stazionari ammette tale funzione, caratterizzandoli.

iii. Determina le equazioni delle rette tangenti a γ passanti per il punto $(1/2;\ \pi/2)$. Indica tali rette con r_i, dove $i=1,2,3,\dots$ e l'indice i cresce al crescere del coefficiente angolare della retta. Determina l'area racchiusa dalla curva γ, dalla retta r_2 e dalla retta r_3.

iv. Detta $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, determina i valori di $F(0)$, $F(1)$ e $F(2)$. Dal grafico γ deduci il grafico di F e determina l'equazione della retta tangente a quest'ultimo nel suo punto di ascissa 2.

[tratto da M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, P7 pag. 2074]

2. **Un gelato conveniente.** Alberto lavora in una ditta che produce gelati, nel reparto che si occupa di realizzare incarti. Gli viene chiesto di progettare un involucro di forma conica, ricavato tagliando un settore circolare di un disco di raggio R assegnato, in modo che R sia l'apotema del cono (vedi figura).



   i. Posto $2x$ la misura in radianti dell'angolo α al centro del settore circolare che rappresenta lo sviluppo del cono, spiega dettagliatamente, senza fare calcoli, come Alberto può ricavare il volume del cono in funzione di x.

   ii. Alberto ha ottenuto il seguente risultato:

$$V(x)=\frac{R^3}{3\pi^2}x^2\sqrt{\pi^2-x^2}\ ,\ 0\leq x\leq\pi\,.$$

   Verifica se Alberto ha operato correttamente.

   iii. Posto $R=\sqrt[3]{\pi^2}\ dm$ determina il valore di x che realizza l'incarto con la capienza massima, esprimendo il risultato in radianti e la sua approssimazione ai primi sessagesimali. Determina anche la capienza massima, approssimando il risultato ai centimetri cubici.

Ad Alberto è chiesto di affrontare un secondo problema: realizzare la base circolare di ciascun contenitore conico.

Poiché la realizzazione di ciascun involucro lascia come scarto un secondo settore circolare, quello relativo all'angolo $2\pi-\alpha$, Alberto si chiede se riesce a utilizzare tale scarto, ricavandone il cerchio formante la base del contenitore conico.

   iv. Determina il raggio del cerchio di area massima che è possibile costruire con il secondo scarto, in funzione di x. Utilizza tale risultato per aiutare Alberto nel capire se è possibile utilizzare il secondo scarto per formare la base del contenitore conico.

[tratto da M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, P6 pag. 2073]

Questionario. *Risolvi quattro degli otto quesiti:*

1. Dimostra che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita come $y=f(x)=x^5+x^3+x$, è invertibile. Chiamata $f^{-1}(y)$ la sua inversa, determina l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 3.
[M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, Q1 pag. 2075]

2. Dimostra che $\sum_{i=3}^{n}\frac{2}{i^2-2i}=\frac{3n^2-7n+2}{2n(n-1)}$. Determina carattere ed eventuale somma della serie $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2}{n^2-2n}$. *[inventato]*

3. Determina per quali valori del parametro reale λ l'equazione $|x|^3-x+\lambda=0$ ammette un'unica soluzione, motivando esaurientemente la tua risposta.
[tratto da M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, Q9 pag. 2076]

4. Sia λ un parametro reale. Dati i vettori $\vec{v}_\lambda(1;\ 2-\lambda;\ 2+\lambda)$ e $\vec{u}(5;\ 4;\ 3)$, determina per quali valori del parametro λ:
   i. i due vettori dati risultino fra loro perpendicolari;
   ii. l'angolo formato dai due vettori è di 45°.

[inventato]

5. Un recipiente vuoto viene riempito d'acqua tramite un rubinetto nel seguente modo:
· viene versato un litro nel primo minuto;
· viene versato metà litro nel secondo minuto;
· viene versato metà di metà litro nel terzo minuto;
· … e così via, senza mai interrompere il versamento.
Quale dev'essere la capacità del recipiente affinché l'acqua non tracimi? Motiva esaurientemente la tua risposta. *[M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, Q1 pag. 2076]*

6. È data la funzione $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$, dove $f(t)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$. Sapendo che $f(0)=-1/2$, $f(1/2)=1/4$ e $f(1)=1$, calcola $F(0)$, $F'(0)$ e $F'(1/2)$.
[M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, Q7 pag. 2078]

7. L'accelerazione dell'automobile Laferrari è ben modellizzata dalla funzione $a(t)=20t^2e^{-t/\tau}\ m/s^2$, dove il tempo t è espresso in secondi e $\tau=1\ s$.
   i. Determina quanto vale l'accelerazione massima;
   ii. Stima al decimo di secondo l'intervallo di tempo Δt che impiega per passare da 0 a 100 km/h;
   iii. Prova che esistono due istanti di tempo nei quali l'accelerazione istantanea coincide con l'accelerazione media in Δt.

[inventato]

8. In un contenitore cilindrico contenente 30 litri d'acqua viene versata una soluzione zuccherata al 20% (in ogni litro di soluzione sono presenti 200 g di zucchero). La portata con la quale si versa la soluzione è pari a 1,5 ℓ/min e non varia nel tempo. Contemporaneamente la miscela formatasi, considerata omogenea, esce dal contenitore cilindrico in modo tale che al suo interno rimangano sempre 30 litri di miscela.
   i. Prova che l'equazione che descrive m', ovvero come varia la massa di zucchero espressa in grammi al variare del tempo espresso in minuti, in funzione della massa di zucchero m espressa in grammi, è $m'=300-m/20$.
   ii. Determina la quantità in grammi di zucchero presenti dopo 5 minuti.

[tratto da M. Bergamini & CO., Matematica.blu.2.0, 2017, pag. 2054]

NOTE:
i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;
ii. Punteggio massimo 15 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***10 p.ti***.