La geometria analitica nello spazio: punti, vettori, rette e piani

esercizi 1

prof. D. Benetti

Risolvere i seguenti esercizi (le soluzioni sono alla fine di tutti gli esercizi).

Esercizio 1. Determina due vettori di modulo 5 paralleli al vettore $\vec{v}\left(1;\ 2;\ -1\right)$.

Esercizio 2. Determina due vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ paralleli al vettore $\vec{v}\left(1;\ -1;\ 1\right)$ e tali che $\vec{w}_i - \hat{i}$, $i = 1,\ 2$, abbia modulo 3 (attenzione: nell'esercizio *i* è un indice, mentre $\hat{i}$ il versore di *x*).

Esercizio 3. Determina un vettore di modulo unitario perpendicolare ai vettori $\vec{v}\left(1;\ 2;\ 3\right)$ e $\vec{w}\left(1;\ 1;\ -1\right)$. Rappresenta il tutto sullo spazio cartesiano *Oxyz*.

Esercizio 4. Sono dati i vettori $\vec{v}\left(3;\ 4;\ -2\right)$ e $\vec{w}\left(3;\ -3;\ 2\right)$.

i. Determina l'angolo tra i due vettori e rappresentali sullo spazio cartesiano *Oxyz*.
ii. Determina la proiezione ortogonale del primo vettore sul secondo.

Esercizio 5. Sono dati i vettori $\vec{v}\left(2;\ 0;\ \sqrt{3}\right)$ e $\vec{w}\left(0;\ 0;\ -3\right)$.

i. Determina modulo e direzione dei vettori $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{w} \times \vec{v}$.
ii. Determina il volume del parallelepipedo rettangolo di lati v_x, u_y e w_z.
iii. Determina il valore del prodotto misto $\left(\vec{w} \times \vec{u}\right) \bullet \vec{v}$.

La geometria analitica nello spazio: punti, vettori, rette e piani

esercizi 2

prof. D. Benetti

Esercizio 1. Sono dati, nello spazio, i tre punti $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ -3;\ -4)$.

i. Determina perimetro, area e le coordinate del baricentro del triangolo *ABC*.
ii. Determina l'equazione del piano Γ individuato dai punti *A*, *B* e *C*.
iii. Determina l'equazione della retta perpendicolare al piano Γ passante per *A*.

Esercizio 2. Sono dati il punto $P(1;\ -1;\ 2)$ e il piano $\Gamma: x - y + 1 = 0$.

i. Determina la distanza del punto *P* dal piano Γ.
ii. Determina l'equazione della retta *r* perpendicolare al piano Γ passante per *P*.
iii. Individua una retta in Γ che sia sghemba con la retta *r*.

Esercizio 3. Sono dati il punto $P(1;\ -1;\ 2)$ e il piano $\Gamma: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t + s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$.

i. Determina le coordinate cartesiane del piano Γ.
ii. Determina l'equazione del piano Γ' parallelo al piano Γ passante per *P*.
iii. Determina la distanza tra i due piani.

Esercizio 4. Sono dati i punti $P(1;\ -1;\ 2)$ e $Q(0;\ -1;\ 2)$.

i. Determina le coordinate cartesiane della retta *r* passante per i due punti.
ii. Determina centro e raggio della sfera di diametro *PQ*.
iii. Determina la distanza del punto $R(3;\ -3;\ 3)$ dalla retta *r*.

Esercizio 5. Sono dati i punti $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 3)$ e $C(3;\ 2;\ 1)$.

i. Determina le coordinate delle proiezioni A', B', C' dei tre punti sul piano *Oxy*.
ii. Calcola l'area del triangolo $A'B'C'$.
iii. Determina l'equazione del luogo geometrico individuato dall'intersezione del piano *Oxy* con il piano passante per *A*, *B* e *C*.

La geometria analitica nello spazio: punti, vettori, rette, piani e superfici sferiche
esercizi 3[*]

prof. D. Benetti

Esercizio 1. Considera la retta $r:\begin{cases}x-y+z-2=0\\x-y-2z-1=0\end{cases}$. Tra tutti i piani passanti per *r* determina quello:

i. perpendicolare al piano $\Gamma: x-5y+6z-3=0$;

ii. parallelo alla retta $s:\begin{cases}x=4+6t\\y=-13+3t\\z=19+t\end{cases}$;

iii. perpendicolare alla retta $u:\begin{cases}x=2+7t\\y=-7t\\z=1-11t\end{cases}$.

Esercizio 2. È dato il punto $P(2;\ -2;\ 4)$. Determina:

i. l'equazione della sfera avente centro *P* e tangente al piano $\Gamma: x-2y+3z-4=0$;

ii. la distanza di *P* dalla retta $r:\begin{cases}x-y-2=0\\x+z=0\end{cases}$;

iii. Individua una retta in Γ che sia sghemba con la retta *r*.

Esercizio 3. Sono dati i punti $A(1;\ 1;\ 0)$ e $B(0;\ 1;\ -1)$. Dimostra che il luogo geometrico dei punti $P(x;\ y;\ z)$ tali che $\overline{AP}=2\cdot\overline{BP}$ è una superficie sferica ***S***.

i. Determina centro *C* e raggio *r* di ***S***.
ii. Verifica se *A*, *B* e *C* sono allineati.
iii. Determina le equazioni dei piani tangenti alla sfera ***S*** nei suoi punti di intersezione con la retta passante per *A* e *B*.

Esercizio 4. Determina le equazioni dei piani paralleli al piano $\Gamma: x-2y+2z-2017=0$ e che intersecano la sfera ***S***: $x^2+y^2+z^2-10y+6z+9=0$ ciascuno in una circonferenza avente raggio 3.

Esercizio 5. Sono dati i punti $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 0)$ e $C(0;\ 0;\ 3)$. Determina:

i. l'equazione del piano passante per *A*, *B* e *C*;
ii. il centro e il raggio della circonferenza ***C*** passante per i tre punti dati;
iii. l'equazione della circonferenza ***C***.

---

[*] Tratti da http://www.webalice.it/francesco.daddi/.

Soluzioni 1

1. $\pm\frac{5}{\sqrt{6}}\left(1;\ 2;\ -1\right)$.
2. $2\left(1;\ -1;\ 1\right)$ e $-\frac{4}{3}\left(1;\ -1;\ 1\right)$.
3. $\pm\frac{1}{\sqrt{42}}\left(5;\ -4;\ 1\right)$.
4. $\vartheta=\arccos\frac{13}{\sqrt{174}}\approx 10°$; $\left(4;\ 2;\ -2\right)$.
5. $\left(6;\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(6;\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)$; 36; 36.

Soluzioni 2

1. $2p_{ABC}=\left(\sqrt{7}+\sqrt{22}+7\right)\sqrt{2}$; $\mathcal{A}_{ABC}=3\sqrt{6}$; $G\left(0;\ -1;\ 1\right)$. $\Gamma: x+2y-z+3=0$. $r:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}$.
2. $dist\left(P;\ \Gamma\right)=\frac{3}{2}\sqrt{2}$. $r:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=2\end{cases}$. Basta individuare una retta in Γ non passante per P', la proiezione di P sul piano Γ; Poiché $P'\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 2\right)$, scelgo due punti non allineati a P', per esempio $A\left(0;\ 1;\ 0\right)$ e $B\left(-1;\ 0;\ 1\right)$ (il valore assegnato a z è casuale). Otteniamo $r:\begin{cases}x-y+1=0\\y+z-1=0\end{cases}$.
3. $\Gamma: 2x+y-z+3=0$. $\Gamma': 2x+y-z+1=0$. $dist\left(\Gamma';\ \Gamma\right)=dist\left(P;\ \Gamma\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.
4. $r:\begin{cases}y+1=0\\z-2=0\end{cases}$. $\mathcal{S}\left(C\left(\frac{1}{2};\ -1;\ 2\right);\ r=\frac{1}{2}\right)$. $dist\left(R;\ r\right)=\overline{RR'}=\sqrt{5}$, dove $R'\left(3;\ -1;\ 2\right)$ è la proiezione di R sulla retta r.
5. $A'\left(1;\ 3;\ 0\right)$, $B'\left(2;\ 3;\ 0\right)$ e $C'\left(3;\ 2;\ 0\right)$. Posso considerare il problema in R^2 visto che i tre punti hanno la medesima quota: $\mathcal{A}_{A'B'C'}=1$. $r:\begin{cases}x+y+z-6=0\\z=0\end{cases}$.

Soluzioni 3

1. $x-y-z-4=0$; $18x+9y+3z+14=0$; $11x-11y+14z+41=0$.

2. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z+10=0$; $\text{dist}\left(P; r\right)=2\sqrt{42}/3$; osservo che $r\notin\Gamma$ in quanto si intersecano solamente nel punto $A\left(0;\ -2;\ 0\right)$. Basta individuare una retta sul piano non passante per *A*. Si procede quindi come in 2.2.

3. $\overline{AP}=2\cdot\overline{BP}\rightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+z^2=4x^2+4\left(y-1\right)^2+4\left(z+1\right)^2\rightarrow$
$\rightarrow x^2+y^2+z^2+2x/3-2y+8z/3+2=0$ quindi $C\left(-1/3;\ 1;\ -4/3\right)$ e $r=2\sqrt{2}/3$; si nota che $rk\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -4/3 & 0 & -4/3\end{pmatrix}=1$; $3x+3z+1=0$ e $x+z+3=0$.

4. L'esercizio richiede di determinare i piani $\parallel\Gamma$ e la cui distanza dal centro *C* della sfera ***S*** è pari a 4 (perché?). Quindi $x-2y+2z-8=0$ e $x-2y+2z+16=0$.

5. $x-3y-z+1=0$; basta considerare i piani passanti per i punti medi di AB e BC perpendicolari rispettivamente alle rette passanti per A e B e per B e C. Interseco alla fine questi due piani con il piano trovato nel punto precedente per ottenere le coordinate del centro $K\left(-13/3;\ -1/3;\ -7/3\right)$ e quindi il raggio $r=\overline{CK}=\sqrt{426}/3$; Basta intersecare il piano trovato nel primo punto con la superficie sferica di centro *K* e raggio *r*.