Liceo Scientifico Paritario "R. Bruni"　　　　Padova, loc. Ponte di Brenta, 07/12/2017

Interrogazione di Matematica - A

Classe V

Soluzione

1. Calcola la derivata prima delle seguenti funzioni e semplifica l'espressione ottenuta:

i. $y=f(x)=(2x-1)(x+1)$;

$f'(x)=2(x+1)+(2x-1)=4x+1$.

ii. $y=f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{x}$;

$$f'(x)=\left(x^2-2+\frac{1}{x}\right)'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}.$$

iii. $y=f(x)=2^{-\cos^2 x}$;

$$f'(x)=2^{-\cos^2 x}\cdot\ln 2\cdot\left(-\cos^2 x\right)'=2^{-\cos^2 x}\cdot\ln 2\cdot\left(-2\cos x\cdot(-\sin x)\right)=$$
$$=2^{-\cos^2 x}\cdot\ln 2\cdot\left(2\cos x\cdot\sin x\right)=2^{-\cos^2 x}\cdot\ln 2\cdot\sin(2x).$$

iv. $y=f(x)=e^{2-x}+e^{2-\ln x}$; è vero che tale funzione è decrescente per ogni $x>0$?

$$f(x)=e^2\cdot e^{-x}+e^2\cdot e^{-\ln x}=e^2\left(e^{-x}+e^{\ln\frac{1}{x}}\right)=e^2\left(e^{-x}+\frac{1}{x}\right)\to f'(x)=e^2\left(-e^{-x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Ho che $f'(x)=-e^2\left(e^{-x}+\dfrac{1}{x^2}\right)<0$ per ogni $x>0$ visto che la quantità tra parentesi è sempre positiva e il fattore $-e^2$ è negativo. Quindi è vero.

v. $y=f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

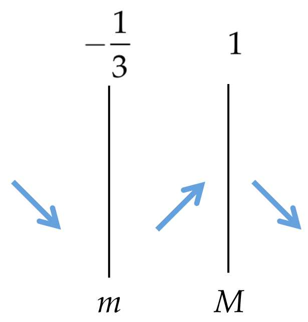
$$f'(x)=\frac{1}{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'=\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cancel{\sqrt{x}}-1\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cancel{\sqrt{x}}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^{\cancel{2}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

2. Determina i massimi e minimi relativi della seguente funzione. Motiva se sono anche assoluti.

$$y = f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 1.$$

Risposta.
Per determinare gli estremi relativi di una funzione devo studiare il segno della sua derivata prima: $f'(x) = -6x^2 + 4x + 2 = -2(3x^2 - 2x - 1) = -2(3x^2 - 3x + x - 1) = -2(3x(x-1) + (x-1)) = 2(1-x)(3x+1)$.

$f'(x) \geq 0 \rightarrow 2(1-x)(3x+1) \geq 0 \rightarrow -\dfrac{1}{3} \leq x \leq 1$



La funzione ammette un minimo relativo $m\left(-\dfrac{1}{3}; f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{37}{27}\right)$ e un massimo relativo $M(1; f(1)) = (1;\ 1)$. Non sono assoluti in quanto $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$.

i. Dall'analisi appena effettuata motiva quanti zeri ammette la funzione.

La funzione ammette almeno uno zero in $]-\infty; -1/3[$ e in $]1; +\infty[$ per il Teorema di esistenza degli zeri e il Teorema di permanenza del segno (ad esempio, se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, esiste un intorno $\wp(-\infty)$ dove la funzione assume lo stesso segno del limite).
La funzione ammette almeno uno zero in $]-1/3;\ 1[$ per il Teorema di esistenza degli zeri.
Quindi la funzione ammette almeno tre zeri. Per il Teorema fondamentale dell'Algebra una funzione polinomiale di grado n ammette al più n zeri reali, quindi f ammette esattamente 3 zeri.

ii. Determina in un punto del grafico di f di ascissa compreso tra le ascisse del punto di minimo e del punto di massimo l'equazione della retta tangente al grafico di f che abbia la stessa pendenza della retta passante per il punto di minimo e di massimo.

Applico il Teorema di Lagrange alla funzione f, continua in $[-1/3;\ 1]$ e derivabile al suo interno; esiste quindi $c \in]-1/3;\ 1[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1/3)}{1 + 1/3} = \dfrac{16}{9}$. Questo è il coefficiente angolare della retta tangente da cercare. Determino un possibile punto di tangenza: $f'(c) = 16/9 \rightarrow 27c^2 - 18c - 1 = 0 \rightarrow c = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{9} \in]-1/3;\ 1[$.

Quindi $t: y - f\left(\dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{9}\right) = \dfrac{16}{9}\left(x - \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{9}\right)$.