Liceo Scientifico Paritario "R. Bruni" Padova, loc. Ponte di Brenta, 05/12/2017

Interrogazione di Matematica - B

Classe V

Studente/ssa ______________________________

1. Calcola la derivata prima delle seguenti funzioni e semplifica l'espressione ottenuta:

   i. $y=f(x)=(2x+1)(x-1)$;
   $f'(x)=2(x-1)+(2x+1)=4x-1$.

   ii. $y=f(x)=\dfrac{2x^3-x-1}{x}$;
   $f'(x)=\left(2x^2-1-\dfrac{1}{x}\right)'=4x+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4x^3+1}{x^2}$.

   iii. $y=f(x)=2^{\sin^2 x}$;
   $f'(x)=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot(\sin^2 x)'=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot(2\sin x\cdot\cos x)=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot\sin(2x)$.

   iv. $y=f(x)=e^{x-2}+e^{\ln x-2}$; è vero che tale funzione è decrescente per ogni $x>0$?
   $f(x)=e^{-2}\cdot e^x+e^{-2}\cdot e^{\ln x}=e^{-2}\left(e^x+e^{\ln x}\right)=e^{-2}\left(e^x+x\right)\rightarrow f'(x)=e^{-2}\left(e^x+1\right)$.
   Ho che $f'(x)=e^{-2}\left(e^x+1\right)>0$ per ogni $x>0$ visto che la quantità tra parentesi è sempre positiva e così anche il fattore e^{-2}. Quindi è falso.

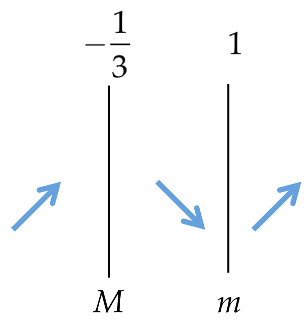
   v. $y=f(x)=\ln\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.
   $$f'(x)=\frac{1}{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=\frac{\cancel{1+\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\cancel{\sqrt{x}}\right)-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\cancel{\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}}}=$$
   $$=\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

2. Determina i massimi e minimi relativi della seguente funzione. Motiva se sono anche assoluti.

$$y = f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

Risposta.
Per determinare gli estremi relativi di una funzione devo studiare il segno della sua derivata prima: $f'(x) = 6x^2 - 4x - 2 = 2(3x^2 - 2x - 1) = 2(3x^2 - 3x + x - 1) =$
$= 2(3x(x-1) + (x-1)) = 2(x-1)(3x+1)$.

$f'(x) \geq 0 \rightarrow 2(x-1)(3x+1) \geq 0 \rightarrow x \leq -\dfrac{1}{3} \vee x \geq 1$



La funzione ammette un massimo relativo $M\left(-\dfrac{1}{3}; f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{37}{27}\right)$ e un minimo relativo $m(1; f(1)) = (1; -1)$. Non sono assoluti in quanto $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

i. Dall'analisi appena effettuata motiva quanti zeri ammette la funzione.

La funzione ammette almeno uno zero in $]-\infty; -1/3[$ e in $]1; +\infty[$ per il Teorema di esistenza degli zeri e il Teorema di permanenza del segno (ad esempio, se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, esiste un intorno $\wp(-\infty)$ dove la funzione assume lo stesso segno del limite).
La funzione ammette almeno uno zero in $]-1/3; 1[$ per il Teorema di esistenza degli zeri.
Quindi la funzione ammette almeno tre zeri. Per il Teorema fondamentale dell'Algebra una funzione polinomiale di grado n ammette al più n zeri reali, quindi f ammette esattamente 3 zeri.

ii. Determina in un punto del grafico di *f* di ascissa compreso tra le ascisse del punto di minimo e del punto di massimo l'equazione della retta tangente al grafico di *f* che abbia la stessa pendenza della retta passante per il punto di minimo e di massimo.

Applico il Teorema di Lagrange alla funzione *f*, continua in $[-1/3; 1]$ e derivabile al suo interno; esiste quindi $c \in]-1/3; 1[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1/3)}{1 + 1/3} = -\dfrac{16}{9}$. Questo è il coefficiente angolare della retta tangente da cercare. Determino un possibile punto di tangenza: $f'(c) = -16/9 \rightarrow 27c^2 - 18c - 1 = 0 \rightarrow c = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{9} \in]-1/3; 1[$.

Quindi $t: y - f\left(\dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{9}\right) = -\dfrac{16}{9}\left(x - \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{9}\right)$.