Liceo Scientifico Paritario "R. Bruni" Padova, loc. Ponte di Brenta, 15/12/2017

Verifica scritta di Matematica

Classe V

Studente/ssa ______________________________

Risolvi 4 degli 8 quesiti proposti. Ogni quesito vale 25 p.ti.

1. Considera la funzione

$$y = f(x) = \frac{x(\ln x - 4)}{\ln x}.$$

   i. Determina l'ordine di infinitesimo γ per $x \to 0^+$.
   ii. Calcola e interpreta geometricamente $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.
   iii. Determina eventuali punti di flesso.

2. Determina il valore dei seguenti limiti:

   i. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{x \cdot \ln(1 + \sin x)}{\tan x}$;
   ii. $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)^{\sin(\pi x)}$.

3. Determina i parametri reali a e b affinché la funzione sia derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2a \sin x - b\sqrt{3} \cos x & \text{se } x < \frac{\pi}{6} \\ a\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2b + 1 & \text{se } x \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

4. Verifica che l'equazione $1 - x^2 + \sqrt{x} = 0$ ammette esattamente una soluzione in $[k;\ k+1]$, dove $k \in \mathbb{Z}$.

5. Una sfera di metallo usata per le demolizioni si sta dilatando a causa di un aumento della temperatura. Indichiamo con $r(t)$ il suo raggio (misurato in centimetri) in funzione del tempo (misurato in ore) e supponiamo che la funzione $r(t)$ sia derivabile per $t > 0$.
   All'istante $t = 1$ la superficie della sfera è $240\ dm^2$ e il suo volume aumenta con velocità di $480\ cm^3/h$. Determina, in tale istante, il raggio della sfera e la velocità con cui aumenta. Infine trova la velocità con cui aumenta la superficie della sfera.

6. Della seguente funzione determinane massimi e minimi relativi (specificando se sono anche assoluti). Tieni conto che $\exists z \in \left]1/2;\ 1\right[$ tale che $f'(z) = 0$. Determina eventuali punti di non derivabilità. Se possibile, prolunga per continuità la funzione.
$$y = f(x) = \frac{\ln(|x|+1)}{x}.$$

7. Considera le funzioni reali f_k e g di variabile x e tali che:
$$f_k(x) = kx^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \ln x,$$
   dove k è un parametro reale. Discuti, al variare di k, le soluzioni dell'equazione $\ln x = kx^2$ e dire, in particolare, per quale valore di k i grafici delle due funzioni date sono tra loro tangenti.

8. Dimostra che se f è una funzione crescente nel suo dominio D allora è iniettiva. Vale anche il viceversa? Giustifica la tua risposta.

NOTE:
i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;
ii. Punteggio massimo 100 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***60 p.ti***.