

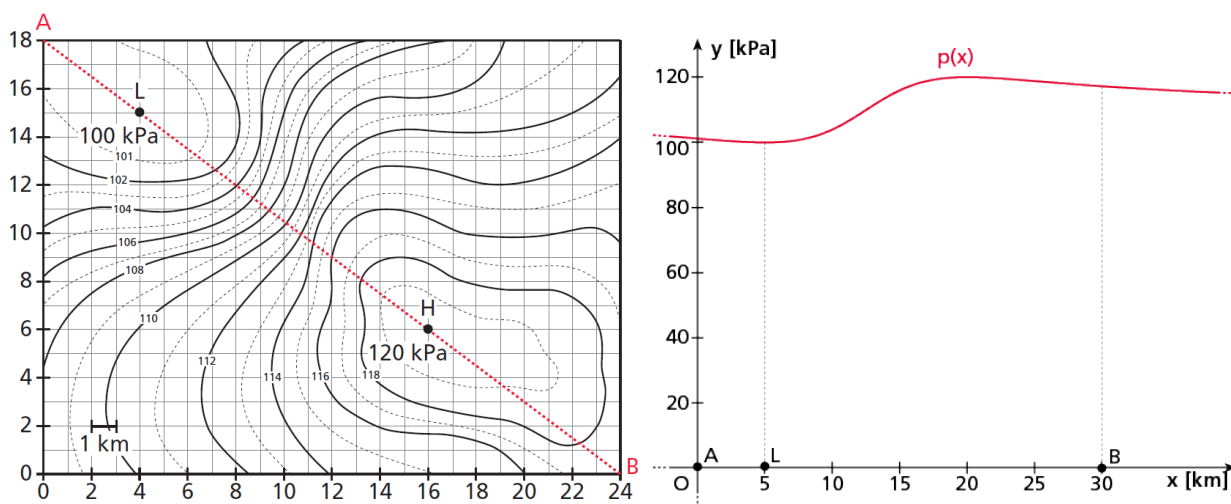
## Simulazione di II prova di Matematica

### Classe V

Studente/ssa \_\_\_\_\_

Risolvi uno dei due problemi.

1. Nel sito web della stazione meteorologica cittadina sono stati pubblicati, come ogni giorno, due grafici. Il primo grafico visualizza la distribuzione locale della *pressione atmosferica* al suolo mediante linee di livello (*isobare*) che uniscono i punti aventi la stessa pressione (misurata in chilopascal, *kPa*). Le linee di livello corrispondono a valori consecutivi della pressione atmosferica (100, 101, 102, ...). La diagonale *AB* passa per i punti *L* e *H*, dove la pressione assume rispettivamente un minimo (100 *kPa*) e un massimo (120 *kPa*). Il secondo grafico rappresenta l'andamento della pressione  $p(x)$  in funzione della posizione  $x$  lungo la diagonale *AB* ( $x$  è espresso in chilometri, con origine in *A*).



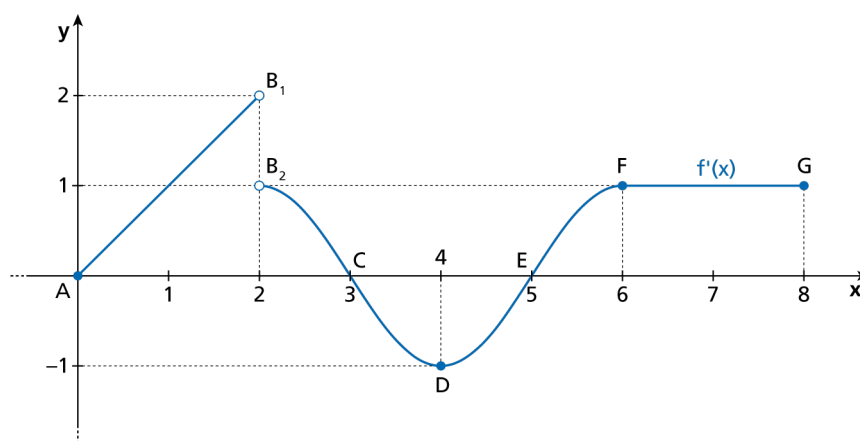
- i. Utilizzando i dati del primo grafico, individua sul secondo grafico il punto corrispondente ad *H*, fornendone ascissa e ordinata.
- ii. Una delle seguenti funzioni rappresenta la funzione  $p(x)$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 30$ , con  $a, b$  costanti reali non nulle:

$$f(x) = 500(a + be^{-x}); \quad g(x) = \frac{300(2x + a)}{(2x + a)^2 + 225} + b.$$

Stabilisci quale, in base ai dati forniti nei grafici. Per la funzione così determinata, ricava i valori delle costanti  $a$  e  $b$ .

- iii. Verificato che è la seconda funzione a rappresentare i dati riportati nel grafico, con  $a = -25$  e  $b = 110$ , studia la corrispondente funzione  $p(x)$  nel suo dominio naturale, indicando in particolare quanti e quali punti di flesso ammette.
- iv. Esponi un modo per stimare accuratamente il valore medio della pressione atmosferica lungo il tratto  $AB$  e applicalo per determinare tale valore.

2. Nella figura sottostante è riportato il grafico della funzione  $f'(x)$ , derivata prima della funzione reale  $f(x)$  definita e continua nell'intervallo  $[0; 8]$ .



Del grafico di  $f'(x)$  sono note le coordinate dei punti evidenziati e le seguenti caratteristiche:

- i tratti  $AB_1$  e  $FG$  sono segmenti di retta;
  - i punti  $B_1$  e  $B_2$  non appartengono al grafico;
  - il tratto  $B_2F$  ha un andamento di tipo sinusoidale e si raccorda col tratto  $FG$  senza presentare un punto angoloso.
- i. Traccia in due distinti riferimenti cartesiani i grafici plausibili delle funzioni  $f''(x)$  e  $f(x)$  nell'intervallo  $[0; 8]$ , nell'ipotesi che sia  $f(0) = 0$ , motivando in modo esauriente i passaggi. Quanto vale  $f(6)$ ? Qual è il massimo valore assunto da  $f(x)$ , e in corrispondenza a quale o a quali valori di  $x$  viene assunto?
  - ii. Giustifica il fatto che la funzione  $f(x)$  presenta un punto di non derivabilità di tipo angoloso nell'intervallo  $[0; 8]$ , quindi determina la misura in gradi, minuti e secondi dell'angolo acuto  $\alpha$  individuato dalle tangenti al grafico di  $f(x)$  in tale punto angoloso.
  - iii. Date tutte le precedenti ipotesi sulla funzione  $f(x)$ , indica quali tra le seguenti affermazioni sono vere, motivando la risposta.

- a. Come conseguenza del teorema di Lagrange, deve esistere necessariamente almeno un valore  $\bar{x}$  nell'intervallo  $]0; 6[$  tale che  $f'(\bar{x}) = 1/3$ .
  - b. Poiché  $f(x)$  non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[0; 6]$ , non può esistere alcun valore  $\bar{x}$  interno a tale intervallo tale che  $f'(\bar{x}) = 1/3$ .
  - c. Benché  $f(x)$  non soddisfi tutte le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[0; 6]$ , esistono più valori  $\bar{x}$  interni a tale intervallo tali che  $f'(\bar{x}) = 1/3$ .
- iv. Di tutti i valori assunti dalla funzione  $f(x)$ , esponi un metodo per determinare il valore medio. Utilizza tale metodo per determinare tale valore.

**Risolvi cinque dei dieci quesiti.**

1. Discuti la continuità e la derivabilità della seguente funzione reale:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Valuta la funzione all'infinito.

2. Data la funzione  $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ , ricava le equazioni di tutte le rette tangenti al suo grafico passanti per il punto  $A(0; 4)$ .

3. Determina tipo e carattere della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+3}}$ .

4. Due punti materiali si muovono nello stesso verso su una retta secondo le leggi orarie  $s_1(t) = \sqrt{4t^2 + 5t + 4}$  e  $s_2(t) = 2(t+1)$  (le  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , sono espresse in metri,  $t$  in secondi).

- Determina le posizioni iniziali dei due punti e stabilisci la distanza tra loro dopo un tempo infinito.
- Determina la velocità dei due punti materiali all'infinito.

5. Enuncia il Teorema di esistenza degli zeri. Supponi che  $f$  sia una funzione definita e continua in  $I = [a; +\infty[$ , che  $f(a) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Dimostra che esiste almeno una soluzione dell'equazione  $f(x) = 0$  in  $I$ .

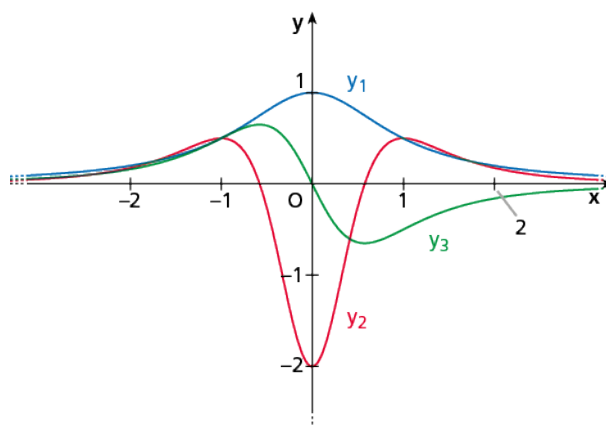
6. Verifica che i punti  $A(1; -1; -1)$ ,  $B(-3; 3; -1)$  e  $C(-3; -1; 0)$  sono i vertici di un triangolo isoscele e determinane l'area. Qual è l'equazione del piano perpendicolare al triangolo passante per  $A$  e per  $B$ ?

7. Considera il triangolo  $T_0$ , rettangolo isoscele di cateto di lunghezza 4 cm. Uno dei due cateti è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele  $T_1$ . Uno dei sue cateti è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele  $T_2$ . Così via.

Sia  $a_{(n)}$  la successione delle aree dei triangoli e  $p_{(n)}$  la successione dei perimetri dei triangoli. Individua la tipologia di successioni e determina i caratteri di  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  e di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n .$$

8. Dato nel riferimento  $Oxyz$  il piano  $\pi$  di equazione  $2\sqrt{2}x + 3y + 2\sqrt{2}z - 4 = 0$  e dette  $A, B, C$  le sue intersezioni con gli assi  $x, y$  e  $z$ , calcola l'area del triangolo  $ABC$  e la distanza di  $O$  dal piano  $\pi$ . Determina infine il volume della piramide  $ABCO$ <sup>1</sup>.
9. Si vuole costruire una stanza a forma di parallelepipedo di volume  $96 \text{ m}^3$ , la cui base sia un quadrato. Per rifinire la stanza è necessario tappezzare le pareti laterali e costruire il pavimento. Per l'acquisto e la posa delle piastrelle per il pavimento è previsto un costo di 16 € al metro quadrato; per l'acquisto e la posa della tappezzeria è previsto un costo di 18 € al metro quadrato. Quali devono essere le dimensioni della stanza affinché il costo complessivo di rifinitura sia il minimo possibile?
10. Nella figura a fianco sono riportati i grafici di una funzione  $f(x)$ , della sua derivata prima  $f'(x)$  e della derivata seconda  $f''(x)$  (tutte e tre le funzioni sono derivabili in  $\mathbb{R}$ ). Associa  $f(x)$ ,  $f'(x)$  e  $f''(x)$  al giusto grafico, motivando la tua scelta.




---

NOTE:

- i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;
- ii. Punteggio massimo 15 p.ti. Per la *sufficienza* è necessario raggiungere il punteggio di **10 p.ti.**

---

<sup>1</sup> Il volume di una piramide di area di base  $A$  e altezza  $h$  è  $V = \frac{1}{3}A \cdot h$ .