Simulazione di II prova di Matematica

Classe V

Studente/ssa ____________________________

Risolvi uno dei due problemi.

1. Il tasso alcolemico T_a misura la concentrazione di alcol nel sangue, espressa in g/ℓ, e può essere calcolato con la seguente formula:

$$T_a = \frac{m_a}{C \cdot m_p},$$

dove m_a rappresenta la massa di alcol ingerita in grammi, m_p è la massa corporea della persona in chilogrammi e C è un coefficiente che viene stimato in $0{,}68\,\ell/kg$ per gli uomini e $0{,}55\,\ell/kg$ per le donne.
La gradazione alcolica di una bevanda, espressa in percentuale, esprime la quantità di alcol in millilitri contenuta in un litro di bevanda: per esempio, se un vino ha una gradazione alcolica del 15%, significa che un litro contiene 150 $m\ell$ di alcol, cioè circa 120 grammi (la densità dell'alcol è $0{,}8\,g/cm^3$).

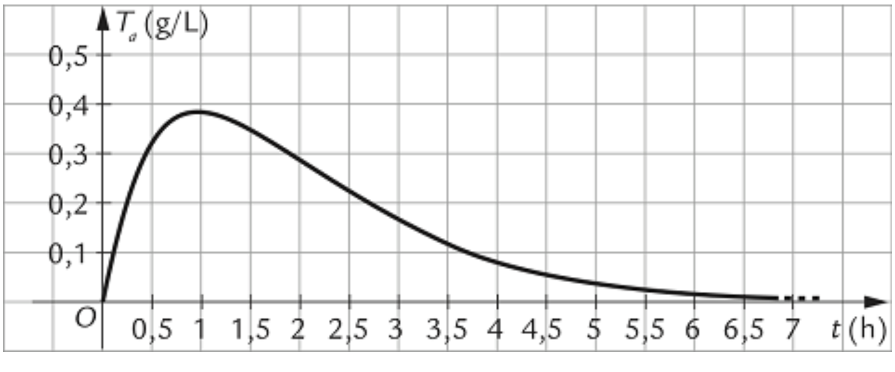
i. Scrivi una formula che permetta di calcolare m_a se si conoscono la gradazione alcolica G della bevanda e il volume V di bevanda assunto in millilitri. Applica la relazione appena trovata per calcolare il tasso alcolemico per un uomo di 68 kg e una donna di 52 kg che hanno bevuto un bicchiere di vino ($V = 150\ m\ell$) che ha gradazione $G = 15\%$.

La variazione nel tempo del tasso alcolemico è approssimativamente descritta da una funzione del tipo:

$$T_a(t) = A \cdot t \cdot e^{-kt},$$

dove A è una costante positiva misurata in $g/(\ell \cdot h)$ e k è un'altra costante positiva misurata in h^{-1}.

ii. Supponendo che il tasso sia massimo dopo un'ora dall'assunzione della bevanda, determina il valore della costante k.



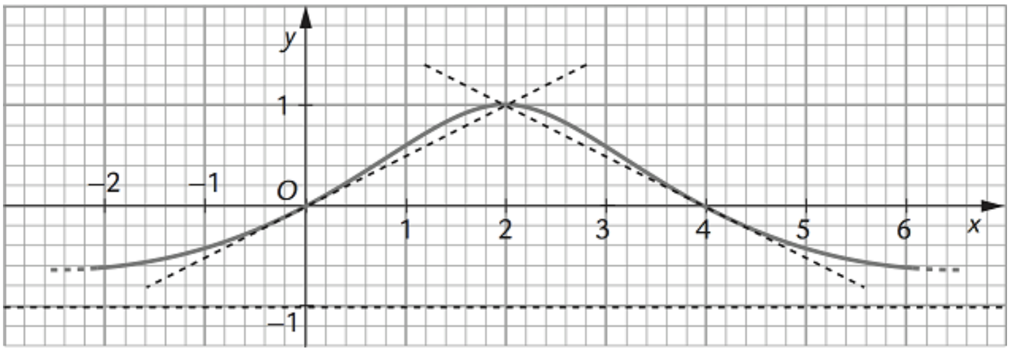
iii. Supponi in seguito che i tassi calcolati al punto i. corrispondano al massimo della funzione precedente e stabilisci se il grafico in figura corrisponde all'uomo o alla donna. Disegna in seguito il grafico corrispondente all'altro dei due individui. Quanto vale il coefficiente A per ciascuno di essi?

Il tasso alcolemico, per i non neopatentati, non deve superare il re $0{,}5\,g/\ell$ quando si è alla guida per non incorrere in sanzioni.

iv. In quali intervalli di tempo, dopo aver bevuto, possono guidare l'uomo e la donna, senza essere passibili di sanzioni? Verifica che la velocità di variazione del tasso alcolemico presenta un minimo e un massimo. In quali istanti? Quanto valgono il minimo e il massimo per l'uomo e per la donna?

[tratto da Simulazioni, L. Sasso]

2. In figura sono riportati il grafico di una funzione $f(x)$, definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, le rette tangenti al grafico nei punti in cui esso interseca l'asse x e l'asintoto orizzontale del grafico.



i. Considera la funzione

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\,,\ x\in[-2;\ 6].$$

Quali sono gli interi più vicini al valore $F(4)$ che si possono trovare con le informazioni a disposizione?

Studia $F(x)$ (parità, segno e zeri, massimi e minimi relativi e assoluti, concavità ed eventuali punti di flesso) e tracciane un grafico qualitativo.

ii. Considera ora la funzione

$$G(x)=\int_0^x f(t)dt\,,\ x\in\mathbb{R}.$$

Utilizza i risultati del punto precedente per lo studio di $G(x)$, discutendo in particolare il comportamento della funzione all'infinito.

iii. Verifica che una possibile espressione per la funzione rappresentata in figura è

$$f(x)=\frac{a}{(x-b)^2+c}-d\,,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\,,$$

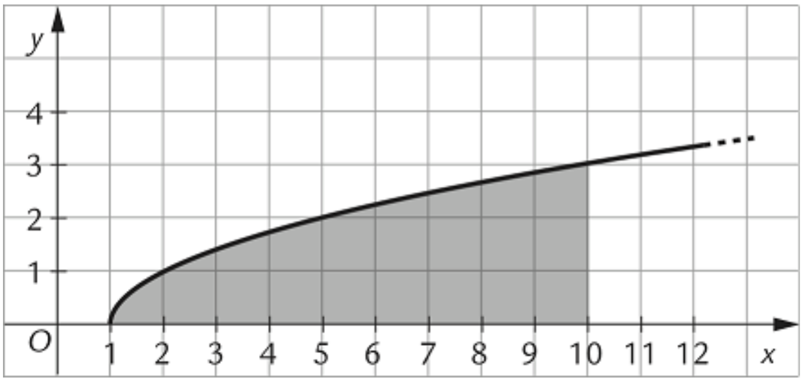
e determina i valori dei parametri a, b, c e d deducendo le informazioni necessarie dal grafico.

iv. Determina l'espressione analitica di $G(x)$ e verifica se il suo comportamento è in accordo con quanto hai previsto nel punto ii..

[tratto da Simulazioni, L. Sasso]

Risolvi cinque dei dieci quesiti.

1. In figura è rappresentato il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x-1}$ e la regione di piano a esso sottesa nell'intervallo $[1;\ 10]$. Trova per quale valore del parametro reale k la retta di equazione $x=k$ divide tale regione di piano in due parti equivalenti.
In seguito trova il valore del parametro reale q per cui la retta di equazione $y=q$ divide la stessa regione di piano in due parti equivalenti. *[tratto da Simulazioni, L. Sasso]*



2. Considera le due funzioni $f(x)=ax^3+bx^2$ e $g(x)=ax^2+bx$, dove $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Determina i possibili valori del parametro b, eventualmente in funzione del parametro a, affinché i grafici di f e di g siano tangenti fra loro in un punto. Rappresenta una situazione a scelta tra le soluzioni trovate. *[tratto da Simulazioni, L. Sasso]*

3. Determina tipo, carattere ed eventuale somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$. *[inventato]*

4. Siano f e g funzioni continue in $[a;\ b]$ e derivabili nel suo interno. Verifica che la funzione
$$h(x)=\left(g(b)-g(a)\right)\cdot f(x)-\left(f(b)-f(a)\right)\cdot g(x)-\left(f(a)g(b)-f(b)g(a)\right)$$
soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle in $[a;\ b]$.
Calcola poi $h'(x)$ nel punto c di cui il teorema garantisce l'esistenza: quale condizione deve soddisfare c? *[tratto da Simulazioni, L. Sasso]*

5. In un gioco da tavolo occorre lanciare due dadi contemporaneamente e, se su entrambi compare lo stesso numero, il punteggio raddoppia. Calcola la probabilità che su 10 lanci:
   i. raddoppi il punteggio esattamente 3 volte;
   ii. raddoppi il punteggio almeno tre volte.

[tratto da Simulazioni, L. Sasso]

6. Considera un oggetto tridimensionale la cui base è un semicerchio di diametro $28\ cm$. Se ogni sezione trasversale dell'oggetto ottenuta intersecando l'oggetto con un piano ortogonale al suo diametro è a sua volta un semicerchio, qual è il volume dell'oggetto?

7. Considera le rette

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda-2 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},\ \text{ed}\ s:\begin{cases} x+y=1 \\ x-z=-1 \end{cases}.$$

   i. Verifica che le rette r ed s sono sghembe;
   ii. Determina, se esiste, un'equazione parametrica della retta t passante per $P(2;\ 1;\ 0)$ e incidente r ed s.

[inventato]

8. Scrivi le equazioni delle superfici sferiche tangenti alla retta

$$r:\begin{cases} x-2y=1 \\ y-z=2 \end{cases}$$

nel punto $P(1;\ 0;\ -2)$ passanti per $Q(1;\ 0;\ 2)$ e di raggio $2\sqrt{3}$.

[tratto da Simulazioni, L. Sasso]

9. Discuti il valore di verità della seguente affermazione: "tra tutti i parallelepipedi rettangoli di volume unitario a base quadrata, il cubo è quello che ha superficie totale di area massima". *[tratto da Simulazioni, L. Sasso]*

10. Quando una palla di neve (supposta sferica) si scioglie, il suo raggio diminuisce con una velocità direttamente proporzionale alla superficie della palla. All'inizio la palla ha raggio pari a $6\ cm$ e dopo 6 minuti il raggio si riduce di $2\ cm$. Quanto tempo ci vuole, dall'inizio dello scioglimento, affinché la palla dimezzi il suo volume? *[inventato]*

NOTE:
   i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;
   ii. Punteggio massimo 15 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***10 p.ti***.