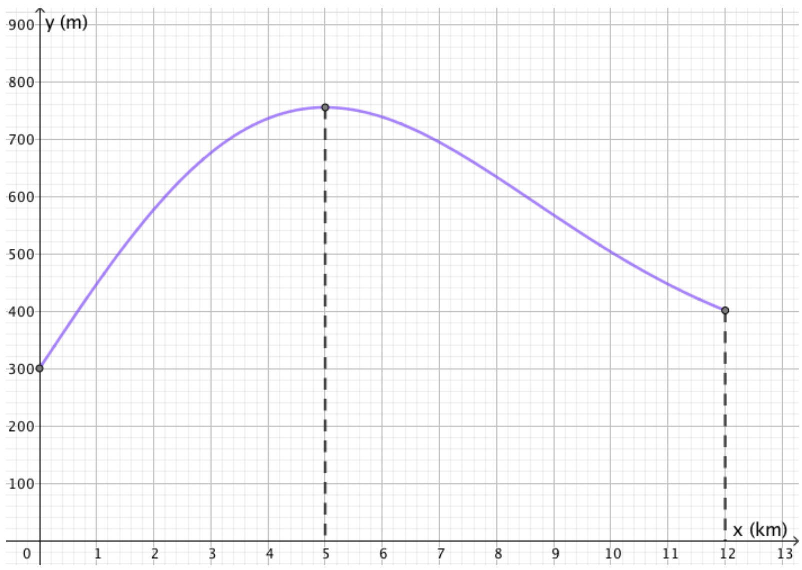
Simulazione di II prova di Matematica

Classe V

Studente/ssa ______________________________

Risolvi uno dei due problemi.

1. Una tappa giornaliera di un percorso di trekking prevede un tragitto di 12 *km*. Il grafico in figura rappresenta l'altitudine y (in metri) in funzione dello spazio x percorso (in chilometri) dal punto di partenza.



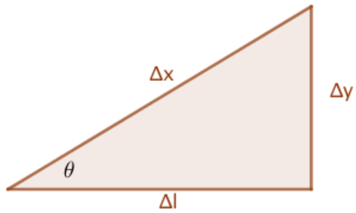
i. Tra le seguenti famiglie di funzioni, dipendenti dai parametri reali λ e μ, una sola è adatta a rappresentare, per $x \in [0;\ 12]$, il grafico in figura:

- $f(x) = 150e^{-\lambda x^2} + \mu$ dove $\lambda, \mu > 0$;
- $f(x) = 150e^{-\lambda x^2} + \mu$ dove $\lambda < 0$ e $\mu > 0$;
- $f(x) = 150xe^{-\lambda x^2} + \mu$ dove $\lambda, \mu > 0$;
- $f(x) = 150xe^{-\lambda x^2} + \mu$ dove $\lambda < 0$ e $\mu > 0$.

Individua quale, giustificando adeguatamente la tua risposta.

ii. Tra le funzioni della famiglia individuata, determina i valori dei parametri λ e μ che individuano la funzione il cui grafico è dato in figura, sapendo che il punto di partenza è posto a una latitudine di 300 *m* e che il punto di massima altitudine si raggiunge dopo aver percorso 5 *km* dalla partenza. Determina poi il dislivello in salita e in discesa (approssima i risultati al metro). Determina infine l'altitudine media dell'intero percorso (approssima il risultato al metro).

La pendenza (in valore assoluto) di una strada è matematicamente definito come la tangente dell'angolo acuto ϑ in figura, cioè come rapporto $\Delta y/\Delta\ell$.



La misura dello spazio percorso Δx è tuttavia più semplice da determinare rispetto alla misura $\Delta\ell$ (si può ottenere semplicemente con un contachilometri). Di fatto la pendenza di una strada è definita nel codice stradale come il seno dell'angolo acuto ϑ in figura, cioè come rapporto $\Delta y/\Delta x$.

iii. Discuti il valore di verità di questa affermazione: "Per strade con pendenze inferiori al 20%, la pendenza matematica può essere approssimata alla pendenza definita nel codice stradale, con un errore minore del 2%". Determina in quale punto del tragitto si ha la pendenza massima, sia in salita che in discesa, ed esprimi tale pendenze massime in percentuale.

iv. Paolo e Francesca sono due escursionisti che percorrono il tragitto in esame. Entrambi partono alle ore 9:00 e, camminando indipendentemente uno dall'altro, arrivano alla conclusione del percorso alle 16:00. Francesca afferma che deve esserci stato almeno un istante, durante il percorso, in cui la sua velocità sia stata uguale a quella di Paolo. Ritieni che Francesca abbia ragione? Motiva esaurientemente la tua risposta.

[tratto da Simulazioni, L. Sasso]

2. Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, sia g_λ la funzione definita dalla posizione $y = g_\lambda(x) = x^3(x+\lambda)$.

   i. Determina il valore di λ in modo che il grafico della funzione ammetta un flesso nel punto *F* di ascissa $x = -1$.
   Verificato che risulta $\lambda = 2$, rappresenta il grafico Γ di g_2 dopo averne individuato le principali caratteristiche (parità, segno, eventuali asintoti, crescenza e concavità). Trova l'equazione della retta *t* tangente a Γ in *F* e le coordinate del punto *A*, ulteriore intersezione tra Γ e la retta *t*. Determina l'area della regione piana delimitata da tali curve (la retta *t* e la curva Γ).

   ii. Calcola le coordinate del punto *B*, appartenente all'arco *FA* e distinto da *F*, tale che la tangente a Γ in *B* sia parallela a *t*.

   iii. Determina il valore del parametro λ in modo che g_λ sia simmetrica di g_2 rispetto all'asse delle ordinate. Indica, motivando esaurientemente la risposta, se è possibile determinare un valore di λ in modo tale che g_λ sia simmetrica di g_2 rispetto all'asse delle ascisse.

Considera, ora, la funzione $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla posizione

$$y = G(x) = \int_{-2}^{x} |g_2(t)|\, dt .$$

   iv. Verifica che la funzione G non ammette estremi relativi né assoluti e calcola $G(-2)$, $G(-3/2)$ e $G(0)$. Dopo aver trovato i punti stazionari di G e avere studiato la concavità della funzione, traccia un grafico indicativo.

[tratto da Simulazione Zanichelli 2018]

Risolvi cinque dei dieci quesiti.

1. Un solido ha per base il trapezoide di $f(x)=1/(1+x^2)$ in $x\in[0;\ 3]$; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse x sono tutti triangoli isosceli di altezza $k\cdot x$, con $k\in\mathbb{R}$. Determinare il valore di k in modo che il volume del solido sia pari a 2.
[tratto da Ord2016 Americhe]

2. Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il dentifricio AtoZ. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile aleatoria X: "numero di persone che utilizza il dentifricio AtoZ". Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano tale prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.
[tratto Ord2015 Europa]

3. Determina tipo, carattere ed eventuale somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n\ln\pi}$. *[inventato]*

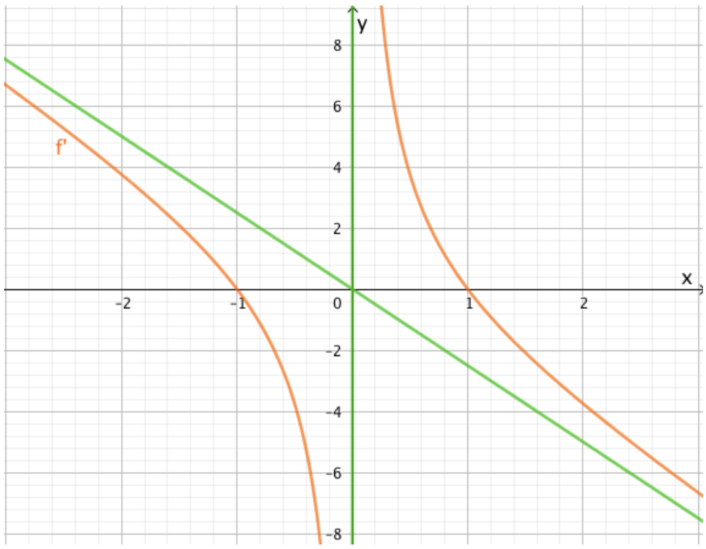
4. Se $f(x)=\int_1^{x^3}\frac{1}{1+\ln t}dt$ per $x\in[1;\ +\infty[$, qual è il valore numerico di $f'(2)$?
[tratto da Ord2015 Europa]

5. Considera la funzione:
$$f(x)=\begin{cases}\ln|x| & \text{se } |x|\geq 1\\ k(x^2-1) & \text{se } |x|<1\end{cases},\ k\in\mathbb{R}.$$
   i. Determina i valori di k per i quali f è derivabile in $\mathbb{R}$.
   ii. Traccia i grafici di f e di f' per uno dei valori di k ottenuto al punto precedente.
[tratto da Simulazioni, L. Sasso]

6. Nello spazio coordinato $Oxyz$ considera tre punti $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, e $C(1;\ 3;\ 3)$.
   i. Determina l'equazione del piano passante per i tre punti dati.
   ii. Calcola l'area del triangolo ABC.
[inventato]

7. La popolazione di una colonia di batteri è di 4.000 batteri al tempo $t=0$ e di 6.500 batteri al tempo $t=3$ (tempo espresso in ore). Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, cioè descrivibile dall'equazione differenziale $y'=k\cdot y$, dove k è una costante reale non nulla e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo $t=10$, la popolazione supererà i 20.000 batteri? Dopo quanti minuti la popolazione raggiungerà tale numerosità? *[tratto da Ord2015 Europa]*

8. Il grafico in figura è quello della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$. Tale grafico è simmetrico rispetto all'origine, passa per $(1;\ 0)$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x=0$ e $5x+2y=0$. Descrivere e tracciare un possibile grafico di $f(x)$ e di $f''(x)$. *[tratto da Ord2016 Americhe]*



9. Determina l'equazione della sfera passante per $P(1;\ 2;\ 1)$, $Q(1;\ 1;\ 0)$ e tangente al piano $\pi: y=0$ nel punto $R(1;\ 0;\ 1)$. *[inventato]*

10. Dimostra che se f è una funzione dispari continua in $\mathbb{R}$ allora, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Dimostra che se invece f è una funzione pari continua in $\mathbb{R}$ allora, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$. *[inventato]*

NOTE:

i. Tempo a disposizione: 6 ore (360 minuti). È possibile uscire dall'aula solo quando sono trascorse 3 ore (180 minuti) dall'inizio della simulazione.

ii. È ammesso l'uso della calcolatrice in accordo con l'allegato alla nota MIUR n. 5641 del 30 marzo 2018.

iii. Punteggio massimo 15 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***10 p.ti***.