Liceo Scientifico Paritario "R. Bruni" Padova, loc. Ponte di Brenta, 15/12/2018

Verifica scritta di Matematica

Classe V

Studente/ssa ______________________

Risolvi 4 degli 8 quesiti proposti. Ogni quesito vale 25 p.ti.

1. Determina i valori dei parametri reali a e b per i quali la funzione

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{se } x<0 \\ b & \text{se } x=0 \\ \sin(\pi x)+1 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

risulti derivabile in $\mathbb{R}$. Per i valori dei parametri trovati:

   i. determina il valore di $f'(0)$;
   ii. traccia il grafico qualitativo di f.

2. Determina il valore dei seguenti limiti:

   i. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\dfrac{2}{x}-\tan\dfrac{2}{x}\right)$;

   ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\ln x)^{1/\ln x}$;

   iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\pi\left(3\sqrt{x}-\sqrt{9x+\sqrt{x}}\right)\right)$;

   iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{1-\sqrt{\cos x-x^2}}$.

3. Sia f una funzione continua in $[a;\ +\infty[$ tale che $f(a)<0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Dimostra che la funzione ammette almeno uno zero in tale intervallo.

4. Una scala lunga $2{,}5\ m$ è appoggiata a un muro. Se la base, all'istante di tempo t, scivola alla velocità $x'(t)=2\ m/s$, con quale velocità sta scivolando la cima della scala nell'istante in cui la base si trova a $1{,}5\ m$ dal muro?

5. Considera un quadrante circolare AOB di centro O e raggio 1. Sia P un punto dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ tale che la sua distanza da B sia x; traccia la tangente in P all'arco $\overset{\frown}{AB}$ e indica con Q il punto di intersezione della tangente con la semiretta di origine O passante per A.
   i. determina l'espressione $\overline{PQ}^2$ in funzione di x e calcola $\lim_{P\to B}\left(\overline{PQ}/\overline{AQ}\right)$.
   ii. posta l'espressione del punto precedente uguale alla funzione $f(x)$, rappresenta il suo grafico qualitativo, indipendentemente dalle limitazioni geometriche poste dal problema. Metti in evidenza il tratto del grafico che rappresenta il problema.

6. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione definita dalla posizione $x \mapsto f(x)=e^x+x$.
   i. Verifica che la funzione ammette almeno uno zero nel semiasse negativo delle ascisse;
   ii. Traccia il grafico qualitativo di f;
   iii. Giustifica che f è invertibile e determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse.

7. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:
   i. $f(x)=e^{2-x}-e^{2-\ln x}$;
   ii. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;
   iii. $f(x)=\left(e^x+1\right)\left(e^{2x^2}+2\right)^2\left(e^{3x^3}+3\right)$;
   iv. $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$.

8. Determina i valori dei parametri a, b e c in modo tale che la funzione

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x^2+c}$$

ammetta un asintoto orizzontale di equazione $y=2$ e che la retta tangente al grafico di f in $T(2;\ 0)$ sia parallela alla retta $r: y=2x$.
Per i valori dei parametri trovati, tracciare il grafico qualitativo di f.

NOTE:
i. È ammesso l'uso del calcolatore elettronico o di tavole numeriche;
ii. Punteggio massimo 100 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***60 p.ti***.