Liceo Scientifico Paritario "R. Bruni" Padova, loc. Ponte di Brenta, 16/03/2019

Simulazione di II prova - Matematica e Fisica

Classe V Sezione T

Studente/ssa ______________________________

Risolvi uno dei due problemi.

1. Barretta energetica. Una barretta conduttrice PQ orizzontale di massa m, lunghezza l e resistenza trascurabile è inizialmente ferma e viene lasciata cadere all'istante $t=0$. Essa cade in una regione dello spazio che è sede di un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, orizzontale e perpendicolare alla barretta, con verso riportato nella Figura 1.

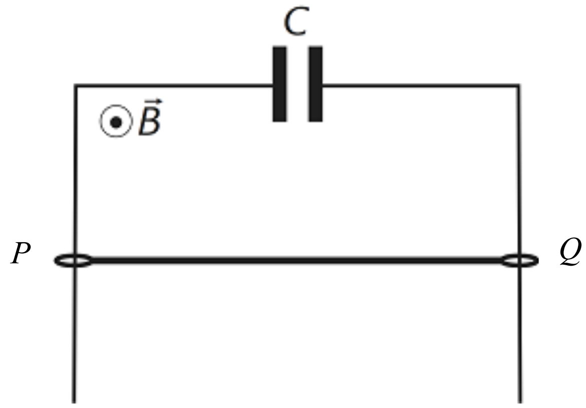


Figura 1.

La caduta della barretta è guidata da due fili conduttori verticali, di resistenza trascurabile; le forze di attrito sono trascurabili, nonostante la barretta sia in contatto costante con i fili conduttori e le estremità superiori dei due fili siano collegate alle armature di un condensatore di capacità C.

i. Rappresenta il diagramma delle forze che agiscono sulla barretta. Detta $\vec{v}$ la velocità della barretta al tempo t, esprimi in funzione di B, l, v e C la carica q del condensatore che si suppone inizialmente scarico. Deduci l'espressione dell'intensità i della corrente che scorre nella barretta all'istante t.

ii. Verifica che il modulo dell'accelerazione della barra è

$$a=\frac{m}{m+Cl^2B^2}g$$

e che il prodotto Cl^2B^2 equivale a una massa. Che cosa si può concludere sulla corrente che in essa circola?

Supponiamo d'ora in poi che $B=0,40\ T$, $l=PQ=0,50\ m$, $C=4,0\ mF$ e $m=20\ g$.

iii. Se l'intensità del campo magnetico raddoppia, qual è la variazione percentuale dell'accelerazione?

iv. Studia la funzione che esprime l'accelerazione della barretta in funzione dell'intensità del campo magnetico B e rappresentane il grafico. Per quale valore di B la variazione dell'accelerazione è massima? Se la lunghezza della corsa della barretta è $h = 1{,}6\ m$, quanta carica si deposita sulle armature del condensatore?

2. Un vortice nel tè. Tutti abbiamo osservato che cosa accade quando si mescola lo zucchero nel tè con un cucchiaino: tanto più veloce si mescola, tanto più in alto verso il bordo della tazza sale il liquido.
Proviamo a chiederci il perché e per farlo consideriamo un esperimento più preciso. Prendiamo un bicchiere di forma cilindrica, riempito a metà circa di acqua colorata, lo poniamo nel centro di una centrifuga, che mettiamo in moto uniforme attorno all'asse di rotazione (asse verticale).

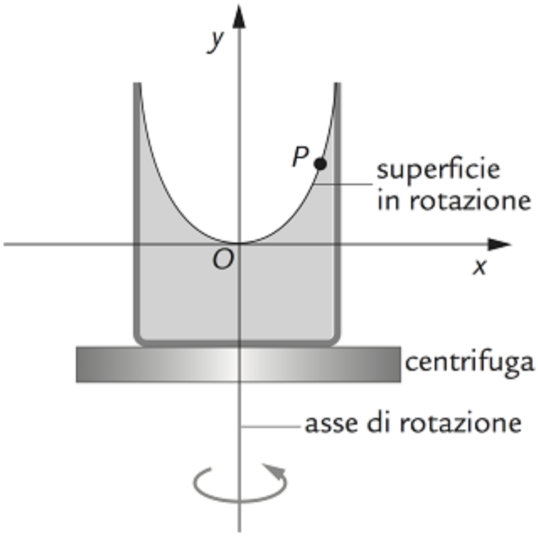


Figura 2.

Osserviamo che (Figura 2):

- al centro del bicchiere in rotazione l'acqua si abbassa, mentre la circonferenza (sul bordo) si alza;
- se la velocità di rotazione aumenta, l'acqua al bordo sale di più e quella al centro scende ulteriormente.

Ci chiediamo quale sia la forma della cavità quando la centrifuga ruota a velocità (angolare) costante.
La superficie della cavità può essere considerata come una superficie di rotazione generata dal bordo ricurvo di una qualunque sezione ottenuta mediante un piano verticale passante per l'asse di rotazione. Il problema diventa quindi quello di determinare l'equazione $y = f(x)$ della curva che genera la superficie.
(Trascura la tensione superficiale e supponi che la superficie di un fluido in quiete giaccia interamente in un piano orizzontale.)
Introduciamo un sistema di riferimento che, per semplicità, ha asse verticale coincidente con l'asse di rotazione e asse orizzontale passante per il centro della cavità (come in Figura 2). Consideriamo ora una particella del fluido di massa m, in rotazione in prossimità della superficie libera, situata nel punto $P(x;\, y)$. Questa particella ruota uniformemente, descrivendo una circonferenza orizzontale con velocità angolare costante.

È naturale supporre che la forza centripeta sia la risultante delle due forze che agiscono sulla particella di fluido considerata: la forza di gravità $\vec{F}_G$, diretta verticalmente verso il basso, e la reazione risultante $\vec{R}$, perpendicolare alla superficie libera.

i. Rappresenta il diagramma delle forze che agiscono sulla porzione di fluido di massa m e dimostra che la tangente dell'angolo α, formato dall'asse x e dalla retta tangente alla curva (che genera la superficie) in P è $\tan\alpha = v^2/(gx)$ (v indica la velocità tangenziale, g l'accelerazione di gravità).

ii. Dimostra che la funzione $f(x)$ cercata soddisfa l'uguaglianza $f'(x) = \omega^2 x/g$.

Se la velocità di rotazione supera un certo valore, il fluido uscirà dal contenitore. Ovviamente tale valore dipenderà dalle caratteristiche del contenitore e dalla quantità di liquido. Considera ora la situazione descritta in Figura 3, in cui il bicchiere ha raggio di base 4 *cm* e altezza 9 *cm* e la velocità angolare è $\omega = 20\, rad/s$.

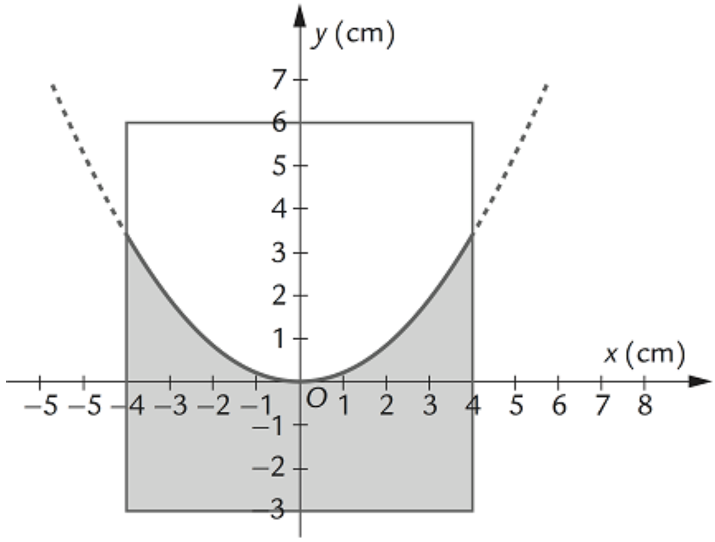


Figura 3.

iii. Determina l'espressione analitica di $f(x)$, approssimando g a $10\ m/s^2$ e ponendo particolare attenzione all'unità di misura utilizzata per x, la distanza dall'asse di rotazione, che deve essere in centimetri. Verifica che il fluido effettivamente non trabocca.

iv. Calcola il volume del liquido contenuto nel bicchiere e il livello che esso raggiunge quando il sistema è in quiete (il volume di un paraboloide (il solido generato dalla rotazione di 180° di una parabola attorno al proprio asse) è pari a $1/6$ del volume del cilindro che lo circoscrive).

Risolvi quattro degli otto quesiti.

1. Due punti materiali P e Q partono nell'istante $t=0$ dall'origine O di un sistema di riferimento cartesiano e si muovono sull'asse x e sull'asse y, rispettivamente con leggi orarie $s_P(t)=e^t-1$ e $s_Q(t)=t^3$. Determina la legge oraria del moto di allontanamento dei due punti e calcola il limite della velocità di allontanamento per t che tende a 0^+.

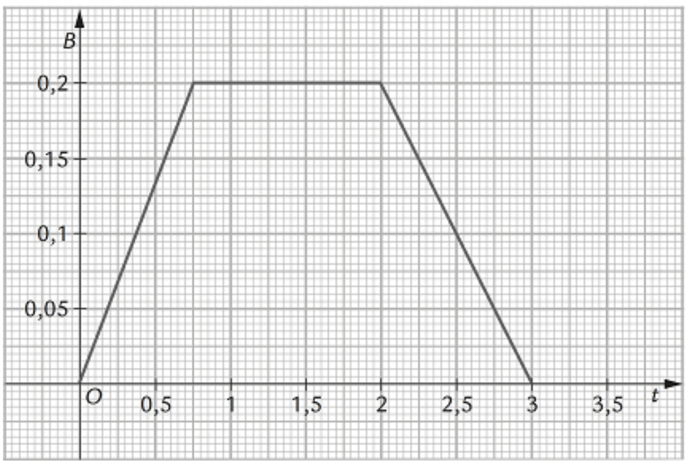
2. Un punto materiale si muove lungo una retta con legge oraria:

$$s(t)=t^2-2t^3+8\ln(t+1),$$

con $t\geq 0$ misurato in secondi.
   i. Verifica che esiste un unico punto di stazionarietà t_S e che tale punto è un punto di inversione, cioè un punto in cui la velocità cambia verso.
   ii. Verifica che il punto materiale parte dall'origine del sistema di riferimento e ritorna in tale posizione in un unico istante $\tilde{t}>0$ e calcola tale tempo approssimando il suo valore a meno di $1/10$.

3. Il raggio r di un pallone gonfiabile sferico aumenta secondo la ge $r(t)=r_0\left(2-e^{-2t}\right)$ per $t\geq 0$, con r_0 costante reale positiva, t misurato in secondi ed r in centimetri. Calcola la velocità con cui cresce il volume del pallone nell'istante $t=0$ e nell'istante in cui r assume il valore $3/2\,r_0$.

4. Una bobina quadrata di lato $l=4{,}0\ cm$ è costituita da 50 spire; essa è disposta verticalmente in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ orizzontale e perpendicolare al piano delle spire della bobina. La resistenza della bobina è $R=4{,}0\ \Omega$.
   i. Si fa variare l'intensità B del campo magnetico secondo la curva del grafico in figura.



Scrivi la funzione che esprime la corrente indotta nell'intervallo di tempo $[0;\ 3\ s]$.

ii. Supponi ora che il campo magnetico $\vec{B}$ vari secondo una legge sinusoidale con frequenza *f* di 550 Hz. Sapendo che il valore massimo di $\vec{B}$ è 0,1 T e che all'istante $t = 0$ il campo è nullo, scrivi la legge di B in funzione del tempo e quella della corrente indotta. Quali considerazioni puoi fare sul risultato ottenuto?

5. All'interno di un acceleratore viene condotto un esperimento lanciando una contro l'altra due particelle aventi velocità $v_1 = 2{,}25 \cdot 10^8 \; m/s$ e $v_2 = 1{,}80 \cdot 10^8 \; m/s$. Calcola la velocità che ha la seconda particella nel sistema di riferimento solidale con la prima.

6. Data la funzione $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - 2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, determina i valori da assegnare ai parametri affinché il grafico abbia un asintoto di equazione $y = x - 2$. Prova che il grafico di *f* ammette come punto di simmetria l'intersezione degli asintoti.

7. Dimostra che il grafico della funzione $f(x) = 20x^3 - 33x^2 - 36x$ non interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti interni all'intervallo $[2;\ 3]$.

8. Fra tutti i settori circolari di perimetro fissato pari a p, stabilisci qual è quello di area massima. Calcola il valore di tale area massima.

NOTE:

i. Tempo a disposizione: 5 ore (300 minuti). È possibile uscire dall'aula solo quando sono trascorse 2,5 ore (150 minuti) dall'inizio della simulazione.

ii. È ammesso l'uso della calcolatrice in accordo con l'allegato alla nota MIUR n. 5641 del 30 marzo 2018.

iii. Punteggio massimo 20 p.ti. Per la ***sufficienza*** è necessario raggiungere il punteggio di ***12 p.ti***.